



Images directes II: F-isocristaux convergents

Jean-Yves Etesse

► To cite this version:

| Jean-Yves Etesse. Images directes II: F-isocristaux convergents. 2009. hal-00425919v2

HAL Id: hal-00425919

<https://hal.science/hal-00425919v2>

Preprint submitted on 3 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Images directes II : F -isocristaux convergents

Jean-Yves ETESSE¹

Sommaire

- 0. Introduction
- 1. F -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse
 - 1.1. Notations
 - 1.2. Des équivalences de catégories
- 2. F -isocristaux convergents sur un schéma lisse formellement relevable
 - 2.1. Espaces rigides associés aux schémas formels
 - 2.2. F -isocristaux convergents et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules
- 3. Relèvement de Teichmüller, réduction, spécialisation et espaces rigides analytiques
 - 3.1. Relèvements de Teichmüller
 - 3.2. Morphismes de spécialisation et de réduction
 - 3.3. $Spm\ K\{T\}$: la boule unité de la droite affine rigide
 - 3.4. Exemples
- 4. Images directes de F -isocristaux convergents
 - 4.1. Convergence des images directes
 - 4.2. Cas fini étale

1. (CNRS - Institut de Mathématique, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES Cedex France)
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

Résumé

Cet article est le deuxième d'une série de trois articles consacrés aux images directes d'isocristaux : ici nous considérons des isocristaux convergents avec structure de Frobenius.

Soit \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K de caractéristique 0. Dans un premier temps nous caractérisons les F -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse sur k . Dans un deuxième temps, pour k parfait et après avoir explicité en détail les relèvements de Teichmüller, notamment pour la droite affine rigide, nous en déduisons l'existence d'isomorphismes de Frobenius sur les images directes de F -isocristaux convergents par un k -morphisme propre et lisse relevable.

Abstract

This article is the second one of a series of three articles devoted to direct images of isocrystals : here we consider convergent isocrystals with Frobenius structure.

Let \mathcal{V} be a complete discrete valuation ring, with residue field $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ of characteristic $p > 0$ and fraction field K of characteristic 0. Firstly we characterize convergent F -isocrystals on a smooth affine k -scheme. Secondly, for perfect k and after a detailed exposition of the Teichmüller liftings, especially for the affine rigid line, we derive the existence of Frobenius isomorphisms on the direct images of convergent F -isocrystals under a proper smooth and liftable k -morphism.

2000 Mathematics Subject Classification : 14D15, 14F20, 14F30, 14G22.

Mots clés : F - isocristaux convergents, cohomologie cristalline, cohomologie convergente, cohomologie rigide, images directes.

Key words : convergent F - isocrystals, crystalline cohomology, convergent cohomology, rigid cohomology, direct images.

0. Introduction

Sauf mention contraire, dans tout cet article on désigne par \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K de caractéristique 0, d'indice de ramification e , et π une uniformisante.

Cet article est le deuxième d'une série de trois articles consacrés aux images directes d'isocristaux. Ici on introduit une structure de Frobenius sur les isocristaux considérés dans [Et 6], tout en restant dans le cadre «convergent». Les résultats concernent trois aspects de la théorie : d'une part l'allure des F -isocristaux convergents sur un schéma lisse aux §1 et §2, d'autre part la convergence des images directes par un morphisme propre et lisse relevable $f : X \rightarrow S$ de k -schémas au §4, et dans l'étape intermédiaire du §3 nous explicitons les relèvements de Teichmüller, leurs liens avec la spécialisation et la réduction, en développant le cas de la boule unité de la droite affine rigide. Ainsi les fonctions L pour de telles images directes convergentes sont définies et on étudiera leurs propriétés ultérieurement.

Notre approche via les isocristaux néglige la torsion dans la cohomologie cristalline ; d'autres approches la prennent en compte, chez Ogus [O 4] via les T -cristaux, ou chez Shiho ([Shi 1], [Shi 2], [Shi 3]) via la cohomologie log-cristalline.

Au §1 on obtient une description des F -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse [cor (1.2.3)] qui est l'analogue de celle de type Monsky-Washnitzer obtenue par Berthelot dans le cas surconvergent [B 3]. Cette description s'étend au cas lisse relevable dans le §2 [théo (2.2.1)].

Au §3 on étudie en détail les relèvements de Teichmüller qui joueront un rôle crucial au §4 dans la preuve que le morphisme de Frobenius sur les images directes est un isomorphisme : une fois défini le morphisme de Frobenius sur l'image directe (qui est un isocristal convergent), un résultat fondamental de Bosch-Güntzer-Remmert nous dit qu'il sera un isomorphisme s'il en est ainsi en passant aux fibres ; le point clé est que l'image inverse par ces relèvements de Teichmüller est la réalisation du foncteur fibre qui commute aux Frobenius, ce qui permet de se ramener à la cohomologie rigide pour laquelle il est connu que le Frobenius est un isomorphisme. On est amené à expliciter le morphisme de spécialisation utilisé par Berthelot et à le comparer avec celui utilisé par Tate [Ta] ou celui utilisé par Bosch-Güntzer-Remmert [B-G-R]. On montre que le relèvement de Teichmüller est une section du morphisme

de spécialisation et du morphisme de réduction de [B-G-R] : une attention particulière est accordée aux points à bonne réduction. On termine ce §3 par l'étude de la boule unité fermée de la droite affine rigide et par des exemples explicites de points dans les tubes.

Si le morphisme propre et lisse $f : X \rightarrow S$ est relevable en un morphisme propre et lisse sur \mathcal{V} , les images directes de F -isocristaux convergents sont des F -isocristaux convergents [théo (4.1.2)]. En fait, si le morphisme $f : X \rightarrow S$ est projectif et lisse et que, ou bien f est relevable, ou bien que X est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur S , ce résultat demeure : la preuve repose sur le cas plongeable de [Et 6, 3.4]. De plus les images directes commutent au passage aux fibres. Dans le cas fini étale les restrictions précédentes sont levées [théo (4.2.1)], et dans le cas galoisien la cohomologie convergente commute aux points fixes sous le groupe du revêtement [théo (4.2.1)].

Notations : Pour les notions sur les espaces rigides analytiques et la cohomologie rigide nous renvoyons le lecteur à [B 3], [B 4], [B-G-R], [C-T] et [LS].

On suppose donné un entier $a \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par $C(k)$ un anneau de Cohen de k de caractéristique 0 [Bour, AC IX, § 2, $n^\circ 3$, prop 5] : $C(k)$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal p $C(k)$ [EGA O_{IV} , 19.8.5] et on note K_0 son corps des fractions, $K_0 = \text{Frac}(C(k))$. Il existe une injection fidèlement plate $C(k) \hookrightarrow \mathcal{V}$ qui fait de \mathcal{V} un $C(k)$ -module libre de rang e [EGA O_{IV} , 19.8.6, 19.8.8] et [Bour, AC IX, § 2, $n^\circ 1$, prop 2]. On fixe un relèvement $\sigma : C(k) \rightarrow C(k)$ de la puissance $a^{\text{ième}}$ du Frobenius absolu de k comme dans [Et 3, I, 1.1] ; on suppose que l'on peut étendre σ en un endomorphisme de \mathcal{V} , encore noté σ , de telle sorte que $\sigma(\pi) = \pi$; on notera encore σ l'extension naturelle de σ à K : lorsque k est parfait $C(k)$ est isomorphe à l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de k et σ est un automorphisme de K . Si $k \hookrightarrow k'$ est une extension de corps de caractéristique $p > 0$, $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \otimes_{C(k)} C(k')$, $K' = \text{Frac}(\mathcal{V}')$, on peut relever la puissance $a^{\text{ième}}$ du Frobenius absolu de k' en un morphisme $\sigma' : K' \rightarrow K'$ au-dessus de $\sigma : K \rightarrow K$ [Et 3, I, 1.1].

1. F -isocristaux convergents sur un schéma affine et lisse

1.1. Notations

Soient $X = \text{Spec } A_0$ un k -schéma affine et lisse, \mathcal{A} une $C(k)$ -algèbre lisse relevant A_0 [El, théo 6] et $A = \mathcal{A} \otimes_{C(k)} \mathcal{V}$. Fixons une présentation

$$\mathcal{A} = C(k)[T_1, \dots, T_n] / (f_1, \dots, f_s);$$

soient P le complété formel de la fermeture projective de $\mathcal{X} = \text{Spec } A$ dans $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$, Y sa réduction sur k et $j : X \hookrightarrow Y$. Alors $]Y[_P = P_K$; de plus $]X[_P$, qui est l'intersection de \mathcal{X}_K^{an} avec la boule unité $B(0, 1^+) \subset \mathbb{A}_K^n$, est l'affinoïde

$$]X[_P = \text{Spm } (K\{T_1, \dots, T_n\} / (f_1, \dots, f_s)).$$

Notons $\hat{\mathcal{A}}$ (resp. \hat{A}) le séparé complété p -adique de \mathcal{A} (resp. A), $\mathcal{A}^\dagger \subset \hat{\mathcal{A}}$ (resp. $A^\dagger \subset \hat{A}$) le complété faible de \mathcal{A} au-dessus de $(C(k), (p))$ (resp. de A au-dessus de $(\mathcal{V}, (\pi))$) [M-W, § 1], et posons $A_K^\dagger = A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K$, $\hat{A}_K = \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} K$. On a des isomorphismes

$$\hat{A} \simeq C(k)\{T_1, \dots, T_n\} / (f_1, \dots, f_s),$$

$$\hat{A} \simeq \mathcal{V}\{T_1, \dots, T_n\} / (f_1, \dots, f_s) \simeq \hat{\mathcal{A}} \otimes_{C(k)} \mathcal{V},$$

$$\mathcal{A}^\dagger \simeq C(k)[T_1, \dots, T_n]^\dagger / (f_1, \dots, f_s),$$

$$A^\dagger \simeq \mathcal{V}[T_1, \dots, T_n]^\dagger / (f_1, \dots, f_s) \simeq \mathcal{A}^\dagger \otimes_{C(k)} \mathcal{V},$$

et aussi [B 3, (2.1.2.4)]

$$\Gamma(P_K, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq \Gamma(\mathcal{X}_K^{an}, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq A_K^\dagger,$$

$$\Gamma(]X[, j^\dagger \mathcal{O}_{P_K}) \simeq \Gamma(]X[, \mathcal{O}_{P_K}) = \Gamma(]X[, \mathcal{O}_{]X[}) \simeq \hat{A}_K.$$

On fixe un relèvement $F_{\mathcal{A}^\dagger} : \mathcal{A}^\dagger \rightarrow \mathcal{A}^\dagger$ de l'élévation à la puissance p^a , $F_{A_0} : A_0 \rightarrow A_0$, au-dessus de σ [vdP, cor 2.4.3] : on peut choisir un tel relèvement $F_{\mathcal{A}^\dagger}$ de manière compatible à une extension $k \hookrightarrow k'$ du corps de base [Et 3, I, 1.2]. Posons $F_{A^\dagger} = F_{\mathcal{A}^\dagger} \otimes_{\sigma|C(k)} \sigma$, et $F_{\hat{A}}$ le séparé complété p -adique de F_{A^\dagger} ; d'où des morphismes $F_{A_K^\dagger} : A_K^\dagger \rightarrow A_K^\dagger$, $F_{\hat{A}_K} : \hat{A}_K \rightarrow \hat{A}_K$ au-dessus de $\sigma : K \rightarrow K$. De même pour \mathcal{V}' comme ci-dessus [cf notations

en fin de l'introduction] et $A' := A \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$ il existe d'après [vdP, cor 2.4.3] un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'^{\dagger} & \xrightarrow{F_{A'^{\dagger}}} & A'^{\dagger} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A^{\dagger} & \xrightarrow{F_{A^{\dagger}}} & A^{\dagger} \end{array}$$

au-dessus du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma'} & \mathcal{V}' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{V}. \end{array}$$

On désigne par $\mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{\dagger})$ (resp. $\mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Modloc}(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{\dagger})$; resp. $\mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Modlib}(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{\dagger})$) la catégorie des A_K^{\dagger} -modules de type fini (resp. A_K^{\dagger} -modules projectifs de type fini; resp. A_K^{\dagger} -modules libres de type fini) M munis d'un morphisme

$$\phi_M : F_{A_K^{\dagger}}^*(M) =: M^{\sigma} \longrightarrow M$$

appelé morphisme de Frobenius. Par analogie avec Wan [W 2, def 2.8] [W 3, def 2.1] nous dirons que M est un **F^a-module surconvergent** (resp. et **projectif**; resp. et **libre**) sur A_K^{\dagger} . En considérant les mêmes définitions sur \hat{A}_K au lieu de A_K^{\dagger} on dira que $\mathcal{M} \in \mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Mod}(\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}})$ (resp. $\mathcal{M} \in \mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Modloc}(\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}})$; resp. $\mathcal{M} \in \mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Modlib}(\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}})$) muni de

$$\phi_{\mathcal{M}} : F_{\hat{A}_K}^*(\mathcal{M}) =: \mathcal{M}^{\sigma} \longrightarrow \mathcal{M}$$

est un **F^a-module convergent** (resp. et **projectif**; resp. et **libre**) sur \hat{A}_K .

Lorsque le Frobenius est un isomorphisme on dira que l'on a une **structure de Frobenius forte**. On a des notions analogues sur A^{\dagger} et \hat{A} , sans tensoriser par K : on utilisera alors les notations $\mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}), \dots \mathbf{F}^{\mathbf{a}}\text{-}\mathbf{Modlib}(\hat{\mathbf{A}})$.

Soit $\Omega_{A^{\dagger}}^1$ le module des \mathcal{V} -différentielles de A^{\dagger} au sens de Monsky-Washnitzer [M-W, theo 4.2]

$$\Omega_{A^{\dagger}}^1 := \Omega_{A^{\dagger}/\mathcal{V}}^1 / \bigcap_n \mathfrak{m}^n \Omega_{A^{\dagger}/\mathcal{V}}^1 ,$$

$$\Omega_{A_K^{\dagger}}^1 := \Omega_{A^{\dagger}}^1 \otimes_{\mathcal{V}} K , \quad \Omega_{\hat{A}}^1 := \widehat{\Omega_{\hat{A}/\mathcal{V}}^1} , \quad \Omega_{\hat{A}_K}^1 := \Omega_{\hat{A}}^1 \otimes_{\mathcal{V}} K .$$

Notons $\mathbf{F}^a\text{-Conn}^\dagger(\mathbf{A}_K^\dagger)$ (resp. $\mathbf{F}^a\text{-Conn}(\hat{\mathbf{A}}_K)$) la catégorie des A_K^\dagger -modules (resp. \hat{A}_K -modules) projectifs de type fini M (resp. \mathcal{M}) à connexion intégrable

$$\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega_{A_K^\dagger}^1$$

$$(\text{resp. } \hat{\nabla} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega_{\hat{A}_K}^1)$$

et munis d'un isomorphisme horizontal

$$\phi^\dagger : (F_{A_K^\dagger}^*(M), F_{A_K^\dagger}^*(\nabla)) =: (M^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (M, \nabla)$$

$$(\text{resp. } \hat{\phi} : (F_{\hat{A}_K}^*(\mathcal{M}), F_{\hat{A}_K}^*(\hat{\nabla})) =: (\mathcal{M}^\sigma, \hat{\nabla}^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \hat{\nabla})).$$

On note $\mathbf{Conn}^\dagger(\mathbf{A}_K^\dagger)$ (resp. $\mathbf{Conn}(\hat{\mathbf{A}}_K)$) la catégorie des A_K^\dagger -modules (resp. \hat{A}_K -modules) projectifs de type fini M (resp. \mathcal{M}) à connexion intégrable dont la série de Taylor converge sur un voisinage strict du tube de la diagonale dans $\mathcal{X}_K^{\text{an}} \times \mathcal{X}_K^{\text{an}}$ (resp. dont la série de Taylor converge sur le tube de la diagonale dans $\mathcal{X}_K^{\text{an}} \times \mathcal{X}_K^{\text{an}}$). On note $\mathbf{F}^a\text{-Isoc}^\dagger(\mathbf{X}/\mathbf{K})$ (resp. $\mathbf{F}^a\text{-Isoc}(\mathbf{X}/\mathbf{K})$) la catégorie de F -isocristaux surconvergents (resp. des F -isocristaux convergents) sur X , définie par Berthelot [B 3] : une définition rapide est donnée par Crew [Cr, §1] ; cf aussi [LS] pour plus de détails.

On utilisera un exposant $()^\circ$ pour spécifier les sous-catégories des objets unités (i.e. tels qu'en tout point géométrique les pentes du Frobenius sont nulles), $F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)^\circ$, $F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)^\circ$, $F^a\text{-Conn}^\dagger(A_K^\dagger)^\circ$, $F^a\text{-Conn}(\hat{A}_K)^\circ$, ... ou la restriction de foncteurs aux objets unités.

On dispose de foncteurs naturels rendant commutatif le diagramme [Et 3, I, § 5]

$$\begin{array}{ccccc} F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{\Gamma^\dagger} & F^a\text{-Conn}^\dagger(A_K^\dagger) & \longrightarrow & F^a\text{-Modloc}(A_K^\dagger) \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{G} & & \downarrow \mathcal{H} \\ F^a\text{-Isoc}(X/K) & \xrightarrow{\hat{\Gamma}} & F^a\text{-Conn}(\hat{A}_K) & \longrightarrow & F^a\text{-Modloc}(\hat{A}_K), \end{array}$$

où $\Gamma^\dagger := \Gamma(\mathcal{X}_K^{\text{an}}, -)$ est une équivalence de catégories [B 3, cor (2.5.8)], $\hat{\Gamma} := \Gamma(\lfloor X[, -)$ est pleinement fidèle [O 2, 2.15, 2.23] et [Et 3, I, (5.2.2)] et le foncteur \mathcal{G} (resp. \mathcal{H}) envoie un A_K^\dagger -module projectif de type fini M sur son séparé complété p -adique $\mathcal{M} = M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$: \mathcal{G} et \mathcal{H} sont fidèles [Bour, A II, § 5, n° 3, prop 7] et [Bour, AC I, § 3, n° 5, prop 9 c)].

La restriction \mathcal{F}° de \mathcal{F} à $F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)^\circ$ est un foncteur pleinement fidèle [Et 3, théo 5]

$$\mathcal{F}^\circ : F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)^\circ \longrightarrow F^a\text{-Isoc}(X/K)^\circ ;$$

et même \mathcal{F} est pleinement fidèle [Ked, theo 1.1].

Nous allons montrer en 1.2 ci-après que $\hat{\Gamma}$ est en fait une équivalence de catégories : ainsi \mathcal{G} sera pleinement fidèle.

1.2. Des équivalences de catégories

Avec les notations de 1.1 nous allons montrer que la donnée d'un F^a -isocrystal convergent sur X équivaut à celle d'un \hat{A}_K -module projectif de type fini \mathcal{M} , muni d'une connexion intégrable

$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega_{\hat{A}_K}^1$$

et d'un isomorphisme horizontal

$$\phi : (\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \nabla),$$

où $(\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma)$ provient de (\mathcal{M}, ∇) en étendant les scalaires par $F_{\hat{A}_K}$.

Proposition (1.2.1). *Avec les notations ci-dessus, le foncteur $\Gamma(\rfloor X[, -)$ induit une équivalence entre*

- (i) *La catégorie des $\mathcal{O}_{\rfloor X[}$ -modules cohérents (resp. et localement libres), et celles des \hat{A}_K -modules de type fini (resp. et projectifs) ;*
- (ii) *La catégorie des $\mathcal{O}_{\rfloor X[}$ -modules cohérents à connexion intégrable (resp. des isocristaux convergents sur X), et celle des \hat{A}_K -modules projectifs de type fini munis d'une connexion intégrable (resp. et dont la série de Taylor converge sur $\rfloor X[_{\mathcal{X}^2})$.*

Remarque. Berthelot a fourni une description analogue pour les $j^\dagger \mathcal{O}_{\rfloor X[}$ -modules cohérents [B 3, (2.5.2)].

Démonstration. La démonstration est semblable à celle de loc. cit. Remarquons simplement que $\rfloor X[$ étant affinoïde, la donnée d'un $\mathcal{O}_{\rfloor X[}$ -module cohérent \mathcal{E} équivaut à celle du \hat{A}_K -module de type fini $\mathcal{M} = \Gamma(\rfloor X[, \mathcal{E})$ [B-G-R, 9.4.2]. De même l'assertion “projectif” en (ii) résulte du fait que K est de caractéristique 0 [B 3, (2.2.3) (ii)] [P, 10.3.1]. \square

Théorème (1.2.2). *Avec les notations de 1.1, soient \mathcal{M} un \hat{A}_K -module de type fini, muni d'une connexion intégrable ∇ , et $(\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma)$ le module à*

connexion intégrable déduit de (\mathcal{M}, ∇) par l'extension des scalaires $F_{\hat{A}_K}$. On suppose qu'il existe un isomorphisme horizontal

$$\phi : (\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \nabla).$$

Alors, si (\mathcal{E}, ∇) est le $\mathcal{O}_{]X[}$ -module correspondant à (\mathcal{M}, ∇) par l'équivalence de (1.2.1), la connexion ∇ de \mathcal{E} est convergente.

Démonstration. La preuve suit celle de [B 3, (2.5.7)]. Comme l'assertion est locale sur X [B 3, (2.2.11)] on peut supposer Ω_X^1 libre de base $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_m$; de même, comme \mathcal{M} est nécessairement projectif d'après [P, lemme 10.3.1], on peut supposer \mathcal{M} libre de base e_1, \dots, e_r . Si $z_1, \dots, z_m \in A$ relèvent $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$, $\Omega_{\hat{A}}^1$ est un \hat{A} -module libre de base dz_1, \dots, dz_m ; soient $\partial_1, \dots, \partial_m$ les dérivations correspondantes. Pour tout i et tout k , posons $\partial_i e_k = \sum_j b_{ijk} e_j$, et soit $B_i \in M_r(\hat{A}_K)$ la matrice des $b_{i,j,k}$; la connexion ∇ est déterminée par les B_i . En utilisant l'isomorphisme horizontal ϕ , on peut supposer, comme dans la preuve de [B 3, (2.5.7)] que les matrices B_i sont à coefficients dans \hat{A} .

Soit $\eta_0 \in]0, p^{-(1/p-1)}[$. Pour tout $e \in \mathcal{M} = \Gamma(]X[, \mathcal{E})$, $\underline{\partial}^{\underline{k}} e$ est à coefficients dans \hat{A} , donc $\|\underline{\partial}^{\underline{k}} e\| \leq 1$, et comme $\eta_0 < p^{-(1/p-1)}$ on en déduit

$$(1.2.2.1) \quad \left\| \frac{1}{\underline{k}!} \underline{\partial}^{\underline{k}} e \right\| \eta_0^{|\underline{k}|} \longrightarrow 0 \text{ quand } |\underline{k}| \longrightarrow +\infty.$$

Posons $\zeta_i = 1 \otimes z_i - z_i \otimes 1$, $\tau_j = 1 \otimes T_j - T_j \otimes 1$.

Pour $\eta < 1$, soient

$$U = \{x \in \mathcal{X}_K^{an} \times \mathcal{X}_K^{an} / \forall j, |(1 \otimes T_j)(x)| \leq 1, |(T_j \otimes 1)(x)| \leq 1\},$$

$$W_\eta = \{x \in \mathcal{X}_K^{an} \times \mathcal{X}_K^{an} / \forall j, |\tau_j(x)| \leq \eta\},$$

$$W'_\eta = \{x \in \mathcal{X}_K^{an} \times \mathcal{X}_K^{an} / \forall i, |\zeta_i(x)| \leq \eta\},$$

et $V_\eta = W_\eta \cap U$. Pour toute suite croissante $\underline{\eta}$ de limite 1, l'ouvert $V_{\underline{\eta}} := \bigcup_n V_{\eta_n}$ est égal à $]X[_{\mathcal{X}^2}$, d'après l'exemple de [B 3, (1.3.10)]. Nous allons construire une suite $\underline{\eta}$ telle qu'il existe sur l'ouvert $V_{\underline{\eta}} =]X[_{\mathcal{X}^2}$ un isomorphisme $\epsilon : p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$ induisant sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale les isomorphismes ϵ_n définis par ∇ .

Puisque les T_j engendrent A , il existe des relations $\zeta_i = \sum_j \beta_{ij} \tau_j$, avec

$\beta_{ij} \in A \otimes_{\mathcal{V}} A$; d'où $\| \zeta_i \| \leq \sup_j \| \tau_j \|$, la norme étant la norme spectrale sur U . Par suite on a $V_{\eta_0} \subset W'_{\eta_0} \cap U$. On procède alors comme dans la démonstration de [B 3, (2.2.13)] pour définir sur V_{η_0} un isomorphisme $\varepsilon : p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$ induisant sur les voisinages infinitésimaux de la diagonale les isomorphismes ε_n définis par ∇ , en posant

$$\varepsilon(p_2^*(e)) = \sum_{\underline{k}} \frac{1}{\underline{k}!} \underline{\partial}^{\underline{k}} e \otimes \underline{\zeta}^{\underline{k}},$$

la série convergeant dans $\Gamma(V_{\eta_0}, p_1^*(\mathcal{E}))$ grâce à (1.2.2.1). On va utiliser ensuite l'action de Frobenius pour prolonger l'isomorphisme ε de V_{η_0} à $V_{\underline{\eta}}$, pour une suite $\underline{\eta}$ convenable : tout d'abord, on peut supposer d'après (1.2.1) qu'il existe un morphisme $F_K :]X[= \text{Spm}(\hat{A}_K) \longrightarrow]X[$ tel que l'homomorphisme $\Gamma(]X[, \mathcal{O}_{]X[}) \longrightarrow \Gamma(]X[, \mathcal{O}_{]X[})$ induit par F_K soit égal à $F_{\hat{A}_K} \otimes \sigma$. Le Frobenius ϕ de \mathcal{E} est alors défini par un isomorphisme $\phi : F_K^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ sur $]X[$, ce qui fournit des isomorphismes

$$\phi_i = p_i^*(\phi) : (F_K \times F_K)^* (p_i^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} p_i^* \mathcal{E} \text{ sur } V_{\eta_0}.$$

On définit une suite croissante $\underline{\eta}$ de limite 1 en posant

$$\eta_{n+1} = \min(|\pi|^{-1} \eta_n, \eta_n^{1/p^a}).$$

Montrons que $(F_K \times F_K)(V_{\eta_{n+1}}) \subset V_{\eta_n}$. Posons

$$F_{\hat{A}}(T_j) = T_j^{p^a} + \pi a_j,$$

avec $a_j \in \hat{A}$. Pour $x \in U$ on a

$$\begin{aligned} |(T_j \otimes 1)((F_K \times F_K)(x))| &= |(F_{\hat{A}}(T_j) \otimes 1)(x)| \\ &= |(T_j^{p^a} + \pi a_j \otimes 1)(x)| \leq 1, \end{aligned}$$

de même pour $1 \otimes T_j$, de sorte que $(F_K \times F_K)(x) \in U$. D'autre part, si $J = \text{Ker}(A \otimes_{\mathcal{V}} A \rightarrow A)$, on a dans $(A \otimes_{\mathcal{V}} A)^\wedge$ la relation

$$\begin{aligned} (F_{\hat{A}} \times F_{\hat{A}})(\tau_j) &= 1 \otimes (T_j^{p^a} + \pi a_j) - (T_j^{p^a} + \pi a_j) \otimes 1 \\ &= \tau_j^{p^a} + \pi \alpha_j, \end{aligned}$$

avec $\alpha_j \in J(A \otimes_{\mathcal{V}} A)^\wedge$. Dans $(A \otimes_{\mathcal{V}} A)^\wedge$ on peut écrire α_j sous la forme $\alpha_j = \sum_i \gamma_{ij} \tau_i$, avec $\|\gamma_{ij}\| \leq 1$. Alors, pour $x \in V_{\eta_{n+1}}$, on obtient

$$|\pi \alpha_j(x)| \leq |\pi| \eta_{n+1} \leq \eta_n$$

et

$$|\tau_j^{p^a}(x)| \leq \eta_{n+1}^{p^a} \leq \eta_n.$$

Par conséquent on a bien

$$(F_K \times F_K)(V_{\eta_{n+1}}) \subset V_{\eta_n}.$$

Supposons construit sur $V_n := \bigcup_{i \leq n} V_{\eta_i}$ un isomorphisme $\varepsilon^{(n)} : p_2^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{E}$; en utilisant l'action du Frobenius, on conclut alors, comme dans la preuve de [B 3, (2.5.7)], à l'existence d'un isomorphisme sur $V = \bigcup_i V_{\eta_i} =]X[_{\mathcal{X}^2}$, d'où la convergence de ∇ . \square

Corollaire (1.2.3). *Soient $X = \text{Spec } A_0$ un k -schéma affine et lisse, A une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant A_0 , \hat{A} le séparé complété p -adique de A , $F_{\hat{A}} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ un relèvement de la puissance $a^{\text{ième}}$ de l'endomorphisme de Frobenius de A_0 au-dessus de σ . Alors la catégorie des F^a -isocristaux convergents sur X est équivalente à la catégorie des \hat{A}_K -modules (nécessairement projectifs) de type fini \mathcal{M} , munis d'une connexion intégrable ∇ et d'un isomorphisme horizontal $\phi : (\mathcal{M}^\sigma, \nabla^\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}, \nabla)$.*

Démonstration. D'après la proposition (1.2.1) la catégorie des isocristaux convergents sur X est équivalente à celle des \hat{A}_K -modules projectifs de type fini, munis d'une connexion convergente ∇ . De plus cette équivalence est fonctorielle par rapport à \hat{A} par des arguments analogues à [B 3, (2.5.6)]. On conclut par le théorème (1.2.2). \square

2. F -isocristaux convergents sur un schéma lisse formellement relevable

Nous allons généraliser au cas relevable l'équivalence de catégories du corollaire (1.2.3) précédent.

2.1. Espaces rigides associés aux schémas formels

Dans ce § 2 on se donne $f : X \rightarrow \operatorname{Spec} k$ un k -schéma lisse tel qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel lisse $h : \mathcal{X} \rightarrow \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ relevant f . Par une construction de Raynaud on sait associer à \mathcal{X} (resp. à h) un espace rigide analytique noté \mathcal{X}_K [Bo-Lü 1 et 2] [B 3] (resp. un morphisme $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \operatorname{Spm} K$). Si h est propre alors h_K est propre [Lü]. L'espace \mathcal{X}_K est muni d'une topologie de Grothendieck [B 3, (0.1.2), (0.2)] et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$: nous dirons que $(\mathcal{X}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ est un G -espace annelé [B-G-R, 9.3.1].

Proposition (2.1.1). *Sous les hypothèses 2.1 il existe un \mathcal{V} -schéma formel lisse $h' : \mathcal{X}' \rightarrow \operatorname{Spf} \mathcal{V}$, un \mathcal{V} -isomorphisme $\mathcal{X}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ et des recouvrements par des ouverts lisses $\mathcal{X}' = \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spf} \hat{A}_{\alpha}$, $X = \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spec} A_{\alpha,0}$, où les A_{α} sont des \mathcal{V} -algèbres lisses et $A_{\alpha,0} := A_{\alpha}/\pi A_{\alpha}$.*

Démonstration. Dire que \mathcal{X} est un \mathcal{V} -schéma formel lisse signifie qu'il existe un recouvrement $\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha} \operatorname{Spf} \mathcal{B}_{\alpha}$, où les \mathcal{B}_{α} sont des \mathcal{V} -algèbres plates séparées et complètes pour la topologie π -adique et formellement lisses pour les topologies discrètes sur \mathcal{V} et \mathcal{B}_{α} : les \mathcal{B}_{α} sont donc des \mathcal{V} -algèbres formellement lisses pour les topologies π -adiques sur \mathcal{V} et \mathcal{B}_{α} [EGA O_{IV}, (19.3.1)]. Pour tout α notons $A_{\alpha,0} := \mathcal{B}_{\alpha} / \pi \mathcal{B}_{\alpha}$, et A_{α} une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant $A_{\alpha,0}$ [El, théo 6] : d'après [Et 2, cor 1 du théo 4] il existe, pour tout α , un \mathcal{V} -isomorphisme

$$\hat{A}_{\alpha} \xleftarrow{\sim} \mathcal{B}_{\alpha}, \text{ où } \hat{A}_{\alpha} := \varprojlim_n A_{\alpha} / \pi^n A_{\alpha}.$$

Posons

$$P_{\alpha} = \operatorname{Spf} \mathcal{B}_{\alpha}, \quad P'_{\alpha} = \operatorname{Spf} \hat{A}_{\alpha}, \quad P'_{\alpha\beta} := P'_{\alpha} \times_{P_{\alpha}} (P_{\alpha} \cap P_{\beta});$$

désignons respectivement par ψ_{α} le \mathcal{V} -isomorphisme $\psi_{\alpha} : P'_{\alpha} \xrightarrow{\sim} P_{\alpha}$, et par $\psi_{\alpha\beta}$ le \mathcal{V} -isomorphisme

$$\psi_{\alpha\beta} : P'_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} P_{\alpha} \cap P_{\beta}$$

déduit de ψ_{α} par le changement de base $P_{\alpha} \cap P_{\beta} \hookrightarrow P_{\alpha}$. Le \mathcal{V} -isomorphisme

$$\varphi_{\alpha\beta} := \psi_{\beta\alpha}^{-1} \circ \psi_{\alpha\beta} : P'_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} P'_{\beta\alpha}$$

induit des \mathcal{V} -isomorphismes

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} : P'_{\alpha\beta} \cap P'_{\alpha\gamma} \xrightarrow{\sim} P'_{\beta\alpha} \cap P'_{\beta\gamma}$$

et on a les identités

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = Id, \quad \varphi_{\alpha\alpha} = Id,$$

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\gamma\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha\gamma\beta},$$

grâce au fait que les P_α se recollent pour former \mathcal{X} . Par conséquent on peut recoller les P'_α le long des $P'_{\alpha\beta}$: le schéma formel ainsi obtenu est le schéma formel \mathcal{X}' cherché. \square

Corollaire (2.1.2). *Sous les hypothèses 2.1 le morphisme d'espaces rigides $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \text{Spm } K$ est lisse.*

Démonstration. Compte-tenu de l'isomorphisme $\mathcal{X}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ de (2.1.1) il suffit d'appliquer le critère jacobien [B 3, (0.1.11)]. \square

Corollaire (2.1.3). *Soient S un k -schéma lisse et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme lisse et supposons donnés un \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathcal{S} et un \mathcal{V} -morphisme lisse $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ de schémas formels relevant f . Alors*

- (i) *Il existe un \mathcal{V} -schéma formel lisse $\mathcal{S}' = \bigcup_\alpha \mathcal{S}'_\alpha$, $\mathcal{S}'_\alpha = \text{Spf } \hat{A}_\alpha$ où les A_α sont des \mathcal{V} -algèbres lisses et un \mathcal{V} -isomorphisme $\mathcal{S}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}$.*
- (ii) *Si l'on pose $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$, $\mathcal{X}'_\alpha := \mathcal{X}' \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'_\alpha$, il existe de plus un \mathcal{S}' -schéma formel lisse \mathcal{X}'' et un \mathcal{S}' -isomorphisme $\mathcal{X}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}'$ tel que*

$$\mathcal{X}'' = \bigcup_\alpha \mathcal{X}''_\alpha, \text{ où } \mathcal{X}''_\alpha = \bigcup_\beta \mathcal{X}''_{\alpha,\beta} = \bigcup_\beta \text{Spf } \hat{B}_{\alpha,\beta},$$

les $B_{\alpha,\beta}$ étant des \hat{A}_α -algèbres lisses (resp. des A_α^\dagger -algèbres lisses)

- (iii) *Avec les notations du (ii) il existe aussi un \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathcal{X}''' et un \mathcal{V} -isomorphisme $\mathcal{X}''' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}''$ tel que*

$$\mathcal{X}''' = \bigcup_\alpha \mathcal{X}'''_\alpha, \text{ où } \mathcal{X}'''_\alpha = \bigcup_\beta \text{Spf } \hat{C}_{\alpha,\beta}$$

et $C_{\alpha,\beta}$ est une \mathcal{V} -algèbre lisse munie d'un \mathcal{V} -isomorphisme

$$\hat{B}_{\alpha,\beta} \simeq \hat{C}_{\alpha,\beta}.$$

Démonstration. La proposition (2.1.1.) fournit le (i).

Pour (ii) et (iii) on utilise encore [Et 2, théo 4 et son cor 1] : on peut recoller les $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}''$ (resp. les \mathcal{X}_{α}'' , resp. les \mathcal{X}_{α}''') grâce à l'existence globale de \mathcal{X}_{α}' (resp. de \mathcal{X}' , resp. de \mathcal{X}''). \square

Corollaire (2.1.4). *Sous les hypothèses (2.1.3) le morphisme d'espaces rigides $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{S}_K$ est lisse. Si de plus h est propre alors h_K est propre.*

Démonstration. La lissité de h_K résulte de (2.1.3) (ii) et du critère jacobien [B 3, (0.1.11)].

La définition d'un morphisme propre d'espaces rigides est donnée dans [Lü, 2.4] : la propriété de h entraîne celle de h_K [Lü, theo 3.1]. \square

2.2. F-isocristaux convergents et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules

Rappelons que les hypothèses (2.1) sont satisfaites.

La donnée de $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$ équivaut à celle d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module localement libre de type fini $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ [B 3, (2.3.2), (2.2.3) (ii)] muni d'une connexion ∇ relativement à K , intégrable et convergente. D'après (2.1.1) on a un \mathcal{V} -isomorphisme $\mathcal{X} \simeq \bigcup_{\alpha} \text{Spf } \hat{A}_{\alpha} =: \bigcup_{\alpha} \mathcal{X}_{\alpha}$ où les A_{α} sont des \mathcal{V} -algèbres lisses ; si $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2} : \mathcal{X}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{X}_{\alpha}$ sont deux relèvements de la puissance $a^{\text{ième}}$ du Frobenius absolu de $X_{\alpha} = \mathcal{X}_{\alpha} \bmod \pi$, alors on a un isomorphisme canonique [B 3, (2.2.17)]

$$(2.2.0) \quad F_{\alpha_1}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha_2}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}) ,$$

où $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}, \nabla_{\alpha})$ est la restriction de $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \nabla)$ à $\mathcal{X}_{\alpha K} = \text{Spm}(\hat{A}_{\alpha K})$.

Supposons fixé pour chaque α un relèvement $F_{\alpha} : \mathcal{X}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{X}_{\alpha}$, de la puissance $a^{\text{ième}}$ du Frobenius absolu de $X_{\alpha} = \mathcal{X}_{\alpha} \bmod \pi$, et soit $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$. La structure de Frobenius sur \mathcal{E} fournit pour tout α un isomorphisme [cor (1.2.3)]

$$\phi_{\alpha} : (F_{\alpha}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}), F_{\alpha}^*(\nabla_{\alpha})) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}, \nabla_{\alpha}),$$

avec compatibilités évidentes quand α varie : d'après (1.2.3) la connaissance de $\mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}}$ équivaut à celle de $\Gamma(\mathcal{X}_{\alpha K}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}_{\alpha}})$ avec mêmes données.

Notons $\mathbf{F}^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules localement libres de type fini \mathcal{M} munis d'une connexion ∇ relativement à K , intégrable et d'une famille d'isomorphismes

$$\phi_\alpha : (F_\alpha^*(\mathcal{M}_\alpha), F_\alpha^*(\nabla_\alpha)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_\alpha, \nabla_\alpha) := (\mathcal{M}, \nabla)|_{\mathcal{X}_{\alpha K}} ,$$

compatibles aux isomorphismes de (2.2.0).

Théorème (2.2.1). *Avec les notations de (2.2) la flèche naturelle*

$$F^a\text{-Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$$

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}_\mathcal{X}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Nous venons de montrer que si $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$ alors $\mathcal{E}_\mathcal{X} \in F^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$.

Réciproquement soit $\mathcal{M} \in F^a\text{-Conn}(\mathcal{X}_K)$; puisque \mathcal{M} est localement libre de type fini et que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ est cohérent [B 3, (2.1.9)], alors \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module cohérent. D'après (1.2.3) l'existence des isomorphismes horizontaux

$$\phi_\alpha : (F_\alpha^*(\mathcal{M}_\alpha), F_\alpha^*(\nabla_\alpha)) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_\alpha, \nabla_\alpha)$$

prouve que la connexion est convergente, car la donnée de $(\mathcal{M}_\alpha, \nabla_\alpha, \phi_\alpha)$ équivaut à celle d'un élément de $F^a\text{-Isoc}(X_\alpha/K)$: puisque ces données se recollent la connexion ∇ est convergente [B 3, (2.2.11)], d'où un élément \mathcal{E} de $\text{Isoc}(X/K)$ [B 3, (2.3.2)] tel que $\mathcal{E}_\mathcal{X} = \mathcal{M}$. Enfin les ϕ_α définissent un isomorphisme de $\text{Isoc}(X/K)$

$$\phi_\mathcal{E} : F_\sigma^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

qui est le Frobenius de \mathcal{E} [B 3, (2.3.7)] et $(\phi_\mathcal{E})_\mathcal{X} = \phi_\mathcal{M}$. \square

Suite aux observations en fin de §1.1 on en déduit :

Corollaire (2.2.2). *Avec les notations de (2.2) et 1.1 le foncteur*

$$\mathcal{G} : F^a\text{-Conn}^\dagger(A_K^\dagger) \longrightarrow F^a\text{-Conn}(\hat{A}_K)$$

est pleinement fidèle.

3. Relèvement de Teichmüller, réduction, spécialisation et espaces rigides analytiques

3.0.

Avec les notations de l'introduction, on suppose dorénavant jusqu'à la fin de cet article que k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $q = p^a$, et on fixe une clôture algébrique \bar{k} de k .

On suppose relevée l'élévation à la puissance q sur k (qui est un automorphisme puisque k est parfait) en un automorphisme σ de \mathcal{V} , tel que $\sigma(\pi) = \pi$: on note encore σ son extension à K et ce σ est un automorphisme de K .

3.1. Relèvement de Teichmüller

Soit $X_0 = \text{Spec } A_0$ un k -schéma lisse. Soient $k' \subset \bar{k}$ une extension finie de k de degré d et $x_0 \in X_0(k')$: le k -homomorphisme correspondant à x_0 , $s : A_0 \rightarrow k(x_0) = k'$, se factorise en $s(x_0) : A_0(x_0) = A_0 \otimes_k k(x_0) \rightarrow k(x_0)$. Notons $W = W(k)$ (resp. $W(x_0) = W(k(x_0))$) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. $k(x_0)$),

$$\mathcal{V}(x_0) = W(x_0) \otimes_W \mathcal{V} \simeq W(x_0)[\pi] ,$$

$K_0 = \text{Frac } W$, $K_0(x_0) = \text{Frac}(W(x_0))$, $K(x_0) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x_0))$, σ_{x_0} la puissance p^a sur $k(x_0)$, $\sigma_{W(x_0)} = W(\sigma_{x_0})$ le relèvement canonique de σ_{x_0} à $W(x_0)$, $\sigma_{\mathcal{V}(x_0)} = \sigma_{W(x_0)} \otimes_{\sigma|W} \sigma$ et $\sigma_{K(x_0)}$ (resp. $\sigma_{K_0(x_0)}$) son extension naturelle à $K(x_0)$ (resp. $K_0(x_0)$) définie par $\sigma_{K(x_0)}(u/v) = \sigma_{\mathcal{V}(x_0)}(u)/\sigma_{\mathcal{V}(x_0)}(v)$ (resp. $\sigma_{K_0(x_0)}(u/v) = \sigma_{W(x_0)}(u)/\sigma_{W(x_0)}(v)$). Le morphisme $\sigma_{K(x_0)}$ coïncide, d'après [Et 3, I.1.1] et [B-M 2, (1.2.7) (ii)], avec le morphisme $\sigma' : K' \rightarrow K'$ (au-dessus de $\sigma : K \rightarrow K$) de [Et 3, I.1.1] pour $k' = k(x_0)$.

Notons qu'il existe un unique polynôme unitaire irréductible $\bar{g} \in k[T]$ tel que l'on ait un isomorphisme de k -algèbres $k(x_0) \xrightarrow{\sim} k[T]/(\bar{g})$, et qu'à chaque relèvement (nécessairement irréductible) $g \in \mathcal{V}[T]$ de \bar{g} est associé un unique isomorphisme de \mathcal{V} -algèbres relevant le précédent [EGA IV, (18.3.2)]

$$\mathcal{V}(x_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}[T]/(g),$$

en particulier pour $g = \text{Teich}(\bar{g})$, où Teich est le relèvement de Teichmüller défini comme étant le morphisme composé

$$\text{Teich} : k[T] \rightarrow W[T] \hookrightarrow \mathcal{V}[T]$$

$$\overline{P} = \sum_{i=0}^{i=r} a_i T^i \mapsto \text{Teich}(\overline{P}) = \sum_{i=0}^{i=r} b_i T^i$$

avec $b_i \in W(k) \xrightarrow{\ell} \mathcal{V}$ [Se, II, §5, théo 4] le relèvement de Teichmüller de a_i : d'après [Se, loc. cit.] et [Il, (0.1.3.16) et (0.1.3.18)], Teich est un morphisme d'anneaux.

Toutes les considérations précédentes s'appliqueront aux points fermés $x_0 \in |X_0| := \{\text{points fermés de } X_0\}$; dans ce cas, le k -homomorphisme surjectif correspondant à x_0 , $s : A_0 \twoheadrightarrow k(x_0)$, se factorise en $s(x_0) : A_0(x_0) = A_0 \otimes_k k(x_0) \twoheadrightarrow k(x_0)$ et $k(x_0) = A_0/\mathfrak{m}_{x_0}$ est une extension finie étale de k de degré $\deg x_0 = [k(x_0) : k]$.

Soit A une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant A_0 et fixons une présentation $A = \mathcal{V}[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_m)$. On désigne par \hat{A} (resp. A^\dagger) le séparé complété (resp. le complété faible) \mathfrak{m} -adique de A . D'après [Et 3, (1.2.1)] il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x_0) =: A^\dagger(x_0) & \xrightarrow{F_{A^\dagger(x_0)}} & A^\dagger(x_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A^\dagger & \xrightarrow{F_{A^\dagger}} & A^\dagger \end{array}$$

au-dessus du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(x_0) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}(x_0)}} & \mathcal{V}(x_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{V} \end{array},$$

où F_{A^\dagger} est un relèvement à A^\dagger du Frobenius (puissance q) de A_0 ; d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}(x_0) & \longrightarrow & A^\dagger(x_0) & \longrightarrow & \hat{A}(x_0) := \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x_0) \\ \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \downarrow & & F_{A^\dagger(x_0)} \downarrow & & \downarrow F_{\hat{A}(x_0)} \\ \mathcal{V}(x_0) & \longrightarrow & A^\dagger(x_0) & \longrightarrow & \hat{A}(x_0) \end{array},$$

avec pour flèches horizontales les morphismes canoniques. Nous allons montrer que le $k(x_0)$ -homomorphisme (surjectif si x_0 est un point fermé)

$$s(x_0) : A_0(x_0) = A_0 \otimes_k k(x_0) \twoheadrightarrow k(x_0)$$

se relève de manière canonique en un $\mathcal{V}(x_0)$ -homomorphisme (surjectif si x_0 est un point fermé)

$$\tau_{\hat{A}(x_0)} : \hat{A}(x_0) \rightarrow \mathcal{V}(x_0)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{\tau_{\hat{A}(x_0)}} & \mathcal{V}(x_0) \\ F_{\hat{A}(x_0)} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \\ \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{\tau_{\hat{A}(x_0)}} & \mathcal{V}(x_0) \end{array}$$

commute. Dans un premier temps nous traiterons le cas particulier d'un corps fini $k = \mathbb{F}_q$; dans un deuxième temps nous traiterons le cas général d'un corps parfait de caractéristique $p > 0$, en explicitant le morphisme $\tau_{\hat{A}(x_0)}$.

1^{er} cas : cas particulier où $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini.

Par le théorème [Mo 2, theo 3.3] de Monsky et [Mo 2, def 5.2] (cf aussi [K1] dans le cas $\mathcal{V} = W$) le $k(x_0)$ -homomorphisme (surjectif si x_0 est un point fermé)

$$s(x_0) : A_0(x_0) \rightarrow k(x_0)$$

se relève de manière unique en un $\mathcal{V}(x_0)$ -homomorphisme (surjectif si x_0 est un point fermé)

$$\tau_{\hat{A}(x_0)} : \hat{A}(x_0) \rightarrow \mathcal{V}(x_0)$$

tel que

$$(3.1.1) \quad \tau_{\hat{A}(x_0)} \circ (F_{\hat{A}(x_0)})^{deg \ x_0} = \tau_{\hat{A}(x_0)}.$$

Le morphisme $\tau_{\hat{A}(x_0)}$ est appelé le **relèvement de Teichmüller de $s(x_0)$ (ou de x_0) relativement à $F_{\hat{A}(x_0)}$** .

Or en notant $F_{A_0(x_0)}$ (resp $F_{k(x_0)} = \sigma_{k(x_0)} = \sigma_{x_0}$) le Frobenius (élévation à la puissance q) de $A_0(x_0)$ (resp de $k(x_0)$), le diagramme suivant commute

$$(3.1.2) \quad \begin{array}{ccc} A_0(x_0) & \xrightarrow{s(x_0)} & k(x_0) \\ F_{A_0(x_0)} \downarrow & & \downarrow \sigma_{x_0} \\ A_0(x_0) & \xrightarrow{s(x_0)} & k(x_0), \end{array}$$

et se relève en le diagramme

$$(3.1.3) \quad \begin{array}{ccc} \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{\tau_{\hat{A}(x_0)}} & \mathcal{V}(x_0) \\ F_{\hat{A}(x_0)} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \\ \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{\tau_{\hat{A}(x_0)}} & \mathcal{V}(x_0) , \end{array}$$

dans lequel on vérifie que les deux morphismes $\tau_{\hat{A}(x_0)} \circ F_{\hat{A}(x_0)}$ et $\sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}(x_0)}$ sont des relèvements de Teichmüller de

$$s(x_0) \circ F_{A_0(x_0)} = \sigma_{x_0} \circ s(x_0)$$

relativement à $F_{\hat{A}(x_0)}$, puisque l'on a

$$\tau_{\hat{A}(x_0)} \circ F_{\hat{A}(x_0)} \circ (F_{\hat{A}(x_0)})^{deg \ x_0} = \tau_{\hat{A}(x_0)} \circ F_{\hat{A}(x_0)}$$

et

$$\sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}(x_0)} \circ (F_{\hat{A}(x_0)})^{deg \ x_0} = \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}(x_0)} .$$

Par unicité du relèvement de Teichmüller on en déduit que (3.1.3) commute, i.e.

$$\tau_{\hat{A}(x_0)} \circ F_{\hat{A}(x_0)} = \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}(x_0)} .$$

2^ecas : cas général d'un corps parfait k de caractéristique $p > 0$.

Puisque $\hat{A}(x_0)$ est sans p -torsion il existe d'après Illusie [Il, (0.1.3.16)] un unique homomorphisme d'anneaux

$$s_{F_{\hat{A}(x_0)}} : \hat{A}(x_0) \rightarrow W(\hat{A}(x_0))$$

qui soit section de la projection canonique $W(\hat{A}(x_0)) \rightarrow \hat{A}(x_0)$ et tel que

$$s_{F_{\hat{A}(x_0)}} \circ F_{\hat{A}(x_0)} = W(F_{\hat{A}(x_0)}) \circ s_{F_{\hat{A}(x_0)}} ,$$

où $W(F_{\hat{A}(x_0)}) : W(\hat{A}(x_0)) \rightarrow W(\hat{A}(x_0))$ est induit par fonctorialité par $F_{\hat{A}(x_0)}$ entre anneaux de vecteurs de Witt [Il, (0.1.3.19)]. De plus, pour $y \in \hat{A}(x_0)$, $s_{F_{\hat{A}(x_0)}}(y)$ est l'unique solution d'équations explicites [Il, (0.1.3.17)].

De même, puisque $A_0(x_0)$ et $k(x_0)$ sont sans p -torsion, on définit $s_{F_{A_0(x_0)}}$ et $s_{F_{k(x_0)}} = s_{\sigma_{x_0}}$. Il est à remarquer que $s_{\sigma_{x_0}}$ est le relèvement de Teichmüller usuel pour un corps parfait de caractéristique $p > 0$ [Il, (0.1.3.18)] et qu'il

s'insère dans un diagramme commutatif

$$(3.1.4) \quad \begin{array}{ccc} k(x_0) & \xrightarrow{\sim} & k[T]/(\overline{g}) \\ s_{\sigma_{x_0}} \downarrow & & \downarrow Teich \\ W(k(x_0)) & \xrightarrow{\sim} & W[T]/(Teich(\overline{g})) \\ \iota(x_0) \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathcal{V}(x_0) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{V}[T]/(Teich(\overline{g})) \end{array} ,$$

où $\iota(x_0) : W(k(x_0)) \hookrightarrow \mathcal{V}(x_0)$ est l'injection canonique [Se, II,§5, théo 4] et ι est induit par l'injection canonique $W \hookrightarrow \mathcal{V}$ [loc. cit.].

En notant $W(u) : W(R_1) \rightarrow W(R_2)$ le morphisme d'anneaux de vecteurs de Witt induit par un morphisme d'anneaux $R_1 \rightarrow R_2$ on en déduit un diagramme commutatif

$$(3.1.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{proj} & A_0(x_0) & \xrightarrow{s(x_0)} & k(x_0) & & \\ & \downarrow s_{F\hat{A}(x_0)} & \downarrow s_{FA_0(x_0)} & & \downarrow s_{\sigma_{x_0}} & & \\ \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{s_{F\hat{A}(x_0)}} & W(\hat{A}(x_0)) & \xrightarrow{W(proj)} & W(A_0(x_0)) & \xrightarrow{W(s(x_0))} & W(k(x_0)) \\ & \downarrow F_{\hat{A}(x_0)} & \downarrow W(F_{\hat{A}(x_0)}) & & \downarrow W(F_{A_0(x_0)}) & & \downarrow \sigma_{W(x_0)} \\ \hat{A}(x_0) & \xrightarrow{s_{F\hat{A}(x_0)}} & W(\hat{A}(x_0)) & \xrightarrow{W(proj)} & W(A_0(x_0)) & \xrightarrow{W(s(x_0))} & W(k(x_0)), \end{array}$$

dans lequel $\sigma_{W(x_0)} = W(\sigma_{x_0})$; et on a déjà vu que

$$(3.1.6) \quad \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \iota(x_0) = \iota(x_0) \circ \sigma_{W(x_0)} .$$

On note $\tau_{\hat{A}(x_0)}$ le morphisme composé

$$(3.1.7) \quad \tau_{\hat{A}(x_0)} := \iota(x_0) \circ W(s(x_0)) \circ W(proj) \circ s_{F\hat{A}(x_0)} = \iota(x_0) \circ s_{\sigma_{x_0}} \circ s(x_0) \circ proj ;$$

$\tau_{\hat{A}(x_0)}$ est appelé le **relèvement de Teichmüller de $s(x_0)$ (ou de x_0) relativement à $F_{\hat{A}(x_0)}$** .

Compte tenu de la commutativité du diagramme (3.1.5) et de (3.1.6) on obtient l'égalité

$$(3.1.8) \quad \tau_{\hat{A}(x_0)} \circ F_{\hat{A}(x_0)} = \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}(x_0)} .$$

De plus l'égalité (3.1.7) prouve par réduction modulo π que $\tau_{\hat{A}(x_0)}$ est bien un relèvement de $s(x_0)$.

Lorsque k est un corps fini cette construction redonne bien celle du premier cas étudié : en effet, grâce à (3.1.8) on obtient l'égalité (3.1.1), car $(\sigma_{W(x_0)})^{deg\ x_0} = id$ fournit

$$(\sigma_{\mathcal{V}(x_0)})^{deg\ x_0} \circ \tau_{\hat{A}(x_0)} = \iota(x_0) \circ (\sigma_{W(x_0)})^{deg\ x_0} \circ s_{\sigma_{x_0}} \circ s(x_0) \circ proj = \tau_{\hat{A}(x_0)} ,$$

d'où la coïncidence des deux constructions par l'unicité dans (3.1.1).

Les morphismes composés

$$(3.1.9) \quad \tau_{\hat{A}}(x_0) : \hat{A} \hookrightarrow \hat{A}(x_0) \xrightarrow{\tau_{\hat{A}(x_0)}} \mathcal{V}(x_0) ,$$

$$(3.1.9)' \quad \tau_{\hat{A}_K}(x_0) := \tau_{\hat{A}}(x_0) \otimes_{\mathcal{V}} K : \hat{A}_K \rightarrow K(x_0) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x_0)) ,$$

$$(3.1.10) \quad \tau_{A^\dagger}(x_0) : A^\dagger \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\tau_{\hat{A}}(x_0)} \mathcal{V}(x_0) ,$$

$$(3.1.10)' \quad \tau_{A_K^\dagger}(x_0) := \tau_{A^\dagger}(x_0) \otimes_{\mathcal{V}} K : A_K^\dagger \rightarrow K(x_0) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x_0)) ,$$

sont appelés respectivement **relèvement de Teichmüller de s (ou de x_0) relativement à $F_{\hat{A}}, F_{\hat{A}_K}, F_{A^\dagger}, F_{A_K^\dagger} : \tau_{\hat{A}}(x_0)$ (resp. $\tau_{\hat{A}_K}(x_0), \tau_{A^\dagger}(x_0), \tau_{A_K^\dagger}(x_0)$) est un point de Teichmüller de \hat{A} (resp. de $\hat{A}_K, A^\dagger, A_K^\dagger$) relativement à $F_{\hat{A}}$ (resp. $F_{\hat{A}_K}, F_{A^\dagger}, F_{A_K^\dagger}$)**, tel que

$$(3.1.11) \quad \tau_{\hat{A}}(x_0) \circ F_{\hat{A}} = \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}}(x_0) ,$$

$$(3.1.11)' \quad \tau_{\hat{A}_K}(x_0) \circ F_{\hat{A}_K} = \sigma_{K(x_0)} \circ \tau_{\hat{A}_K}(x_0) ,$$

$$(3.1.12) \quad \tau_{A^\dagger}(x_0) \circ F_{A^\dagger} = \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \circ \tau_{A^\dagger}(x_0) ,$$

$$(3.1.12)' \quad \tau_{A_K^\dagger}(x_0) \circ F_{A_K^\dagger} = \sigma_{K(x_0)} \circ \tau_{A_K^\dagger}(x_0) .$$

La correspondance entre $\tau_{\hat{A}(x_0)}$ et $\tau_{\hat{A}}(x_0)$ est bijective grâce au \mathbb{Z} -isomorphisme d'adjonction

$$Hom_{\mathcal{V}(x_0)}(\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x_0), \mathcal{V}(x_0)) \simeq Hom_{\mathcal{V}}(\hat{A}, \mathcal{V}) ;$$

de même le passage de $\tau_{A^\dagger}(x_0)$ à $\tau_{\hat{A}}(x_0)$ est bijectif comme passage au complété.

Au lieu de considérer x_0 comme point de X_0 à valeur dans k' on peut aussi le considérer comme point de $\mathbb{A}_k^n = Spec k[\underline{T}]$ à valeur dans k' , où $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$: on va voir qu'alors $\tau_{A^\dagger}(x_0)$ s'étend en un point de Teichmüller de $\mathcal{V}[\underline{T}]^\dagger$. Notons $R = \mathcal{V}[\underline{T}]$, R^\dagger (resp. \hat{R}) son complété faible (resp. son séparé complété) et I le noyau de la surjection canonique

$$\mu : R^\dagger \twoheadrightarrow A^\dagger .$$

On peut relever (de manière non unique) le Frobenius F_{A^\dagger} de A^\dagger en un endomorphisme F_{R^\dagger} de R^\dagger de la façon suivante : il suffit de choisir des éléments $F_{R^\dagger}(T_i)$ de R^\dagger tels que

$$F_{R^\dagger}(T_i) \equiv T_i^q \pmod{\pi}, \quad F_{R^\dagger}(T_i) \in \mu^{-1}(F_{A^\dagger}(\mu(T_i))) ,$$

choix qu'il est possible de faire car $F_{A^\dagger}(\mu(T_i)) \equiv T_i^q \pmod{(\pi, I)}$. On étend ce choix d'éléments $F_{A^\dagger}(\mu(T_i))$ en un endomorphisme F_{R^\dagger} de la \mathcal{V} -algèbre R^\dagger tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^\dagger & \xrightarrow{\mu} & A^\dagger \\ F_{R^\dagger} \downarrow & & \downarrow F_{A^\dagger} \\ R^\dagger & \xrightarrow{\mu} & A^\dagger \end{array}$$

commute ; en particulier on a $F_{R^\dagger}(I) \subset I$.

Les morphismes F_{R^\dagger} et F_{A^\dagger} sont finis et fidèlement plats puisque leur réduction mod π le sont [Et 2, théo 17] ; par changement de base de R^\dagger à \hat{R} appliqué au diagramme précédent on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \hat{A} \\ F_{\hat{R}} \downarrow & & \downarrow F_{\hat{A}} \\ \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \hat{A} \end{array} .$$

Par conséquent le k -morphisme composé

$$k[\underline{T}] \twoheadrightarrow A_0 \xrightarrow{s} k(x_0)$$

correspondant au point x_0 de \mathbb{A}_k^n se relève en un \mathcal{V} -morphisme

$$\tau_{\hat{R}}(x_0) : \hat{R} \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\tau_{\hat{A}}(x_0)} \mathcal{V}(x_0)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\tau_{\hat{R}}(x_0)} & \mathcal{V}(x_0) \\ F_{\hat{R}} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{V}(x_0)} \\ \hat{R} & \xrightarrow{\tau_{\hat{R}}(x_0)} & \mathcal{V}(x_0) \end{array}$$

commute : $\tau_{\hat{R}}(x_0)$ est appelé le **relèvement de Teichmüller de x_0 relativement à $F_{\hat{R}}$** . Le morphisme composé

$$\tau_{R^\dagger}(x_0) : R^\dagger \hookrightarrow \hat{R} \xrightarrow{\tau_{\hat{R}}(x_0)} \mathcal{V}(x_0)$$

est appelé le **relèvement de Teichmüller de x_0 relativement à F_{R^\dagger}** .

Lorsque k est un corps fini nous avons vu qu'il y a unicité des relèvements de Teichmüller : dans ce cas il y a **bijection entre les points de Teichmüller de A^\dagger relativement à F_{A^\dagger} et les points de Teichmüller de R^\dagger relativement à F_{R^\dagger} qui se réduisent mod π en des points de X_0** . Ainsi nous avons prouvé :

Proposition (3.1.13). *Sous les hypothèses précédentes, soit $k \hookrightarrow k'$ une extension finie de corps finis. Alors il y a une bijection entre les trois ensembles suivants :*

- (i) *l'ensemble des points $x_0 \in X_0(k') = \{\text{points de } X_0 \text{ à valeur dans } k'\}$,*
- (ii) *l'ensemble des points de Teichmüller de A^\dagger (resp de \hat{A}) relativement à F_{A^\dagger} (resp $F_{\hat{A}}$) à valeur dans $\mathcal{V}(k') := W(k') \otimes_W \mathcal{V}$,*
- (iii) *l'ensemble des points de Teichmüller de R^\dagger (resp \hat{R}) relativement à F_{R^\dagger} (resp $F_{\hat{R}}$) à valeur dans $\mathcal{V}(k') := W(k') \otimes_W \mathcal{V}$ qui se réduisent mod π en des points de X_0 à valeur dans k' .*

Supposons dorénavant jusqu'à la fin de ce §3.1 que $x_0 \in |X_0|$ est un point fermé de X_0 . Alors les morphismes $\tau_{\hat{A}}(x_0)$ et $\tau_{A^\dagger}(x_0)$ (resp. $\tau_{\hat{R}}(x_0)$ et $\tau_{R^\dagger}(x_0)$) sont surjectifs car la réduction de $\tau_{A^\dagger}(x_0)$ mod π (resp. $\tau_{R^\dagger}(x_0)$ mod π)

est le morphisme surjectif $s : A_0 \twoheadrightarrow k(x_0) = A_0/\mathfrak{m}_{x_0}$ de départ (resp. le morphisme surjectif $k[\underline{T}] \twoheadrightarrow k(x_0)$) [M-W, theo 3.2]. Donc $\mathcal{V}(x_0)$ est un quotient de \hat{A} et $\mathcal{V}(x_0) \simeq W(x_0)[\pi]$, qui est un anneau de valuation discrète, est une extension finie étale de \mathcal{V} de rang $\deg x_0$. Le noyau du morphisme surjectif

$$\tau_{\hat{A}_K}(x_0) := \tau_{\hat{A}}(x_0) \otimes_{\mathcal{V}} K : \hat{A}_K \rightarrow K(x_0) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x_0))$$

est ainsi un idéal maximal \mathfrak{q}_x de \hat{A}_K . Remarquons que le morphisme

$$\tau_{A_K^\dagger}(x_0) := \tau_{A^\dagger}(x_0) \otimes_{\mathcal{V}} K : A_K^\dagger \xrightarrow{\varphi} \hat{A}_K \xrightarrow{\tau_{\hat{A}_K}(x_0)} K(x_0)$$

est aussi surjectif car $\tau_{A^\dagger}(x_0)$ l'est ; cette surjectivité provient aussi du fait que φ induit un isomorphisme [G-K 2, prop 1.5]

$$A_K^\dagger / \text{Ker } \tau_{A_K^\dagger}(x_0) \xrightarrow{\sim} \hat{A}_K / \text{Ker } \tau_{\hat{A}_K}(x_0) .$$

En définissant l'application (encore appelée **relèvement de Teichmüller**)

$$(3.1.14) \quad \text{Teich}_{\hat{A}_K} : \text{Max } A_0 \rightarrow \text{Max } \hat{A}_K$$

entre l'ensemble des idéaux maximaux de A_0 et ceux de \hat{A}_K par $\text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0) = \{\text{Ker } \tau_{\hat{A}_K}(x_0)\} = \{\mathfrak{q}_x\}$, nous montrerons au §3.2 que $\text{Teich}_{\hat{A}_K}$ est **une section du morphisme de spécialisation** [B 3,(0.2.2.1)], considéré comme une application

$$\overline{sp} : \text{Max } \hat{A}_K \rightarrow \text{Max } A_0$$

entre l'espace sous-jacent à $\text{Spm } \hat{A}_K$ et l'ensemble des points fermés de $X_0 = \text{Spec } A_0$.

3.2. Morphismes de spécialisation et de réduction

Avec les notations de 3.1 soient $\mathcal{X} = \text{Spf } \hat{A}$ et $\mathcal{X}_K = \text{Spm } \hat{A}_K$. Nous allons examiner de plus près la description donnée par Berthelot [B3, (0.2.2)] de \mathcal{X}_K et du morphisme de spécialisation

$$\overline{sp} : \text{Spm } \hat{A}_K \rightarrow \text{Spec } A_0 ,$$

vu ici comme une application entre les ensembles sous-jacents de points fermés

$$\overline{sp} : |\text{Spec } \hat{A}_K| = \text{Max } \hat{A}_K \rightarrow |\text{Spec } A_0| = \text{Max } A_0 ,$$

pour pouvoir montrer que $T_{\hat{A}_K}$ fournit une section de \overline{sp} .

Soient $x \in Spm \hat{A}_K$ correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset \hat{A}_K$, $\mathring{\mathfrak{m}}_x = j^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_x \cap \hat{A}$ l'image inverse de \mathfrak{m}_x par l'injection canonique $j : \hat{A} \hookrightarrow \hat{A}_K$ et $R_x = \hat{A}/\mathring{\mathfrak{m}}_x$: R_x s'identifie à l'image canonique de \hat{A} dans $K_x = \hat{A}_K/\mathfrak{m}_x$ et le corps des fractions de R_x est $R_x \otimes_{\mathcal{V}} K \simeq K_x$; on note $j_x : R_x \hookrightarrow K_x$ l'injection obtenue par changement de base de \hat{A} à R_x . Berthelot montre que la correspondance

$$x \mapsto R_x = \hat{A}/\mathring{\mathfrak{m}}_x$$

est une bijection [B3, (0.2.2)] entre les points de \mathcal{X}_K et les quotients R_x de \hat{A} qui sont intègres finis et plats sur \mathcal{V} .

La valuation discrète de K s'étend de manière unique en une valuation discrète de K_x , dont l'anneau de valuation \mathcal{V}_x est un \mathcal{V} -module libre de rang $n = [K_x : K]$ et \mathcal{V}_x est la fermeture intégrale de \mathcal{V} dans K_x [Se, chap II, §2, prop 3]. On dispose ainsi d'une injection canonique

$$i_x : R_x \hookrightarrow \mathcal{V}_x$$

qui est finie ; par suite le morphisme

$$i_x^\# := Spec(i_x) : Spec(\mathcal{V}_x) \rightarrow Spec(R_x)$$

est fini et surjectif, donc R_x n'a que deux idéaux premiers (0) et \mathfrak{m}_{R_x} qui sont distincts car l'idéal maximal \mathfrak{m}_{R_x} est le seul idéal premier de R_x au-dessus de $\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} = \pi\mathcal{V}$ [R, chap I, §1, prop 1] : en particulier on a $\pi R_x \subset \mathfrak{m}_{R_x}$ et \mathcal{V} s'injecte dans l'anneau hensélien R_x [EGA IV, (18.5.10)] de dimension 1 [EGA II, (7.1.5)], $Spec R_x = \{(0), \mathfrak{m}_{R_x}\}$. Puisque K_x est aussi le corps des fractions de R_x , R_x qui est fini et plat sur \mathcal{V} est un sous- \mathcal{V} -module libre de \mathcal{V}_x de rang $n = [K_x : K]$ et l'anneau de valuation \mathcal{V}_x domine l'anneau local R_x , i.e. $\mathfrak{m}_{R_x} = \mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x} \cap R_x$.

Considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel $\mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x}$ est l'idéal maximal de \mathcal{V}_x et les flèches sont les flèches canoniques

(3.2.0)

$$\begin{array}{ccccccc}
A_0 & \xrightarrow{\tilde{\psi}_x} & k(R_x) = R_x/\mathfrak{m}_{R_x} = A_0/\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \hat{A}/\mathfrak{m}_{sp(x)} & \xrightarrow{\tilde{i}_x} & k(\mathcal{V}_x) = \mathcal{V}_x/\mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x} \\
\parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
A_0 & \xrightarrow{\overline{\psi}_x} & R_x/\pi R_x = A_0/\tilde{\mathfrak{m}}_x = \hat{A}/\langle \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_x \rangle & \xrightarrow{\tilde{i}_x} & \mathcal{V}_x/\pi \mathcal{V}_x \\
\uparrow \rho & & \uparrow \rho_x & & \uparrow \\
\hat{A} & \xrightarrow{\psi_x} & R_x = \hat{A}/\mathring{\mathfrak{m}}_x & \xrightarrow{i_x} & \mathcal{V}_x \\
\downarrow j & & \downarrow j_x & & \downarrow j'_x \\
\hat{A}_K & \xrightarrow{\theta_x} & K_x = \hat{A}_K/\mathfrak{m}_x & \xrightarrow{id} & K_x
\end{array}$$

et où $\overline{\psi}_x, \tilde{i}_x$ sont obtenus à partir de ψ_x, i_x par réduction modulo π .
Les flèches horizontales composées du diagramme sont notées

$$\theta_x := id \circ \theta_x, \quad \mathring{\theta}_x := i_x \circ \psi_x, \quad \overline{\theta}_x := \tilde{i}_x \circ \overline{\psi}_x, \quad \tilde{\theta}_x := \tilde{i}_x \circ \tilde{\psi}_x,$$

et les noyaux successifs

$$Ker \theta_x = \mathfrak{m}_x,$$

$$Ker (\mathring{\theta}_x) = Ker \psi_x = \mathring{\mathfrak{m}}_x = (Ker \theta_x) \hookrightarrow (\mathring{\theta}_x)^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x}) = \psi_x^{-1}(\mathfrak{m}_{R_x}) =: \mathfrak{m}_{sp(x)},$$

$$Ker \overline{\psi}_x = \tilde{\mathfrak{m}}_x = \widetilde{Ker \theta_x} = \mathring{\mathfrak{m}}_x/\mathring{\mathfrak{m}}_x \cap \pi \hat{A} = \rho(\mathring{\mathfrak{m}}_x) = \mathring{\mathfrak{m}}_x/\pi \mathring{\mathfrak{m}}_x \quad [\mathring{\mathfrak{m}}_x \text{ est } 1^{ier} \text{ et } \pi \notin \mathring{\mathfrak{m}}_x]$$

$$\tilde{\mathfrak{m}}_x = \widetilde{Ker \theta_x} \hookrightarrow Ker \tilde{\theta}_x = Ker \tilde{\psi}_x = \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = Rad (\tilde{\mathfrak{m}}_x).$$

Par le morphisme de spécialisation

$$sp: Max \hat{A}_K \rightarrow Max \hat{A}$$

l'image de \mathfrak{m}_x est l'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_{sp(x)} := \psi_x^{-1}(\mathfrak{m}_{R_x}) = (\mathring{\theta}_x)^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x}).$$

Comme la surjection canonique

$$\rho: \hat{A} \twoheadrightarrow A_0 = \hat{A}/\pi \hat{A}$$

induit une bijection

$$\rho^\# : Max A_0 \xrightarrow{\sim} Max \hat{A},$$

on notera \overline{sp} le composé

$$\overline{sp} : \text{Max } \hat{A}_K \xrightarrow{sp} \text{Max } \hat{A} \xrightarrow{(\rho^\#)^{-1}} \text{Max } A_0 ,$$

et l'image de \mathfrak{m}_x par \overline{sp} est l'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \rho(\mathfrak{m}_{sp(x)}) .$$

3.2.1. Interprétation géométrique du morphisme de spécialisation

Avec les notations de 3.2 considérons le diagramme commutatif suivant

$$(3.2.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Spec } R_x/\pi R_x & \xhookrightarrow{\rho_x^\#} & \text{Spec } R_x & \xleftarrow{j_x^\#} & \text{Spec } K_x \\ \overline{\psi}_x^\# \downarrow & & \psi_x^\# \downarrow & & \theta_x^\# \downarrow \\ \text{Spec } A_0 & \xhookrightarrow{\rho^\#} & \text{Spec } \hat{A} & \xleftarrow{j^\#} & \text{Spec } \hat{A}_K \\ \downarrow pr_0 & & \downarrow pr & & \downarrow pr_K \\ \text{Spec } k & \xhookrightarrow{\quad} & \text{Spec } \mathcal{V} & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } K \end{array}$$

dans lequel $\overline{\psi}_x^\#, \psi_x^\#, \theta_x^\#$ sont des immersions fermées et les flèches pr les projections canoniques.

L'image schématique de $x = \{\mathfrak{m}_x\}$ par $j^\#$ n'est autre que l'image schématique de $\text{Spec } K_x$ par le morphisme dominant $j_x^\#$, à savoir

$$\text{Spec } (\hat{A}/\mathring{\mathfrak{m}}_x) = \text{Spec } R_x = \{(0), \mathfrak{m}_{R_x}\} \xhookrightarrow{\psi_x^\#} \text{Spec } \hat{A} ,$$

et l'intersection de cette adhérence schématique de $\{\mathfrak{m}_x\}$ dans $\text{Spec } \hat{A}$ avec la fibre spéciale $\text{Spec } A_0$ consiste en un unique point fermé $\{\mathfrak{m}_{R_x}\}$ (où \mathfrak{m}_{R_x} est identifié à $\mathfrak{m}_{sp(x)} := \psi_x^{-1}(\mathfrak{m}_{R_x})$ ou à $\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \rho(\mathfrak{m}_{sp(x)})$) qui est la spécialisation de $\{\mathfrak{m}_x\}$. Cette intersection s'écrivant aussi $\text{Spec}(R_x/\pi R_x)$, qui est réduite à un seul point, l'anneau $\overline{R}_x := R_x/\pi R_x$ est donc un anneau artinien local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\overline{R}_x}$, image de \mathfrak{m}_{R_x} par la surjection canonique

$$R_x \twoheadrightarrow \overline{R}_x = R_x/\pi R_x .$$

Au passage, comme $\mathfrak{m}_{\overline{R}_x}$ est nilpotent [Bour, A, chap 8, §6, n° 4, cor du théo 3], remarquons que la topologie π -adique et la topologie \mathfrak{m}_{R_x} -adique coïncident sur l'anneau R_x , i.e. il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathfrak{m}_{R_x}^r \subset \pi R_x \subset \mathfrak{m}_{R_x} .$$

Comme l'adhérence de Zariski de $\{\mathring{\mathfrak{m}}_x\}$ consiste en les idéaux premiers \mathfrak{A} de \hat{A} tels que $\mathfrak{A} \supset \mathring{\mathfrak{m}}_x$ on retrouve le fait que $\{\mathfrak{m}_{sp(x)}\}$ est «une» spécialisation, au sens classique du terme [EGA 0_I, (2.1.1)], de $\{\mathring{\mathfrak{m}}_x\}$.

3.2.2. Lien entre Teichmüller et spécialisation

Toujours avec les notations de 3.2, soit x_0 un point fermé de $\text{Spec } A_0$, correspondant à un idéal maximal \mathfrak{m}_{x_0} de A_0 et à un idéal maximal \mathfrak{q}_{x_0} de \hat{A} . On note $x = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)$ l'image de x_0 par le relèvement de Teichmüller $\text{Teich}_{\hat{A}_K} : \text{Max } A_0 \rightarrow \text{Max } \hat{A}_K$; soient $\mathfrak{m}_x \subset \hat{A}_K$ l'idéal correspondant à x et $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x = j^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_x \cap \hat{A}$.

Cette fois-ci $K_x = K(x_0) = \hat{A}_K / \mathfrak{m}_x$ est une extension finie non ramifiée de K et on a $\theta_x = \tau_{\hat{A}_K}(x_0), \psi_x = \overset{\circ}{\theta}_x = \tau_{\hat{A}}(x_0) : \hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}_x = \mathcal{V}(x_0), i_x$ est un isomorphisme et $R_x = \mathcal{V}_x$, qui est non ramifié sur \mathcal{V} , admet π pour uniformisante : l'idéal $\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle$ de \hat{A} engendré par π et $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x$ est égal à $\mathfrak{m}_{sp(x)}$ et l'anneau $\overline{R}_x = R_x / \pi R_x$ est non seulement artinien local, c'est même le corps $k(sp(x)) = \hat{A} / \mathfrak{m}_{sp(x)} = A_0 / \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)}$ qui est aussi le corps résiduel $k(\mathcal{V}_x)$ de $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}(x_0)$. D'où $\mathfrak{m}_{sp(x)} = \mathfrak{q}_{x_0}$ et $\overline{sp}(x) = x_0$; ainsi

$$\text{Teich}_{\hat{A}_K} : |\text{Spec } A_0| := \text{Max } A_0 \rightarrow |\text{Spec } \hat{A}_K| := \text{Max } \hat{A}_K$$

est une section du morphisme de spécialisation vu comme une application entre ensembles de points fermés

$$\overline{sp} : |\text{Spec } \hat{A}_K| = \text{Max } \hat{A}_K \rightarrow |\text{Spec } A_0| = \text{Max } A_0 .$$

Dans notre situation d'un schéma affine et lisse sur \mathcal{V} **ceci redémontre la surjectivité du morphisme de spécialisation** établie par Berthelot [B3, (1.1.5)].

3.2.3. Morphisme « α » de Tate et spécialisation

L'anneau local R_x étant dominé par l'anneau de valuation \mathcal{V}_x de K_x on a $i_x^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x}) = \mathfrak{m}_{R_x}$. Ainsi **le morphisme « α » de Tate** [Ta, theo 6.4] **est le morphisme**

$$\begin{array}{ccc} \text{Max } \hat{A}_K & \longrightarrow & \text{Max } \hat{A} \\ \mathfrak{m}_x & \longmapsto & (\overset{\circ}{\theta}_x)^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x}) = \psi_x^{-1}(\mathfrak{m}_{R_x}) = \mathfrak{m}_{sp(x)} ; \end{array}$$

c'est donc le morphisme **de spécialisation**

$$sp : \text{Max } \hat{A}_K \rightarrow \text{Max } \hat{A} , x \mapsto \{\mathfrak{m}_{sp(x)}\}$$

de Berthelot [B3, (0.2.2)], dont on retrouve la surjectivité dans [Ta, theo 6.4].

3.2.4. Morphisme « π » de Bosch-Güntzer-Remmert, morphisme de réduction et spécialisation

Pour un anneau B , on note $Nilrad(B)$ (resp $Rad(B)$) le nilradical de B (resp le radical de Jacobson de B), intersection des idéaux premiers (resp maximaux) de B . Dans le cas de notre \mathcal{V} -algèbre lisse A on note $\left(\hat{A}_K\right)^\circ$ l'ensemble des éléments à puissances bornées de \hat{A}_K et $\left(\hat{A}_K\right)^\vee$ l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de \hat{A}_K . D'après Tate [Ta, Theo 5.1, 5.2] on a

$$\begin{aligned}\left(\hat{A}_K\right)^\circ &= \{f \in \hat{A}_K / \forall x \in Spm \hat{A}_K, |f(x)| \leq 1\} , \\ \left(\hat{A}_K\right)^\vee &= \{f \in \hat{A}_K / \forall x \in Spm \hat{A}_K, |f(x)| < 1\} .\end{aligned}$$

Proposition (3.2.4.1). *Sous les hypothèses précédentes on a :*

- (i) $\left(\hat{A}_K\right)^\circ = \hat{A}$.
- (ii) $\left(\hat{A}_K\right)^\vee = Rad \hat{A} = \pi \hat{A}$.

Démonstration.

Comme A est normal noethérien on peut décomposer $S = Spec A$ en la somme finie de ses composantes connexes $\coprod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} Spec A_i$ où A_i est intègre [EGA I, (4.5.5)] et même intégralement clos [Et 2, prop11(1)(ii)]; par suite $\hat{A} = \prod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \hat{A}_i$ où \hat{A}_i est intégralement clos [loc. cit.] et $\hat{A}_K = \prod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \hat{A}_{i,K}$ où $\hat{A}_{i,K} = \hat{A}_i \otimes_{\mathcal{V}} K$ est intégralement clos [Bour, AC V, §1, n° 5, cor 1 de prop 16]. Puisqu'un idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset \hat{A}_K$ est de la forme

$$\mathfrak{m}_x = \hat{A}_{1,K} \times \dots \times \hat{A}_{i-1,K} \times \mathfrak{m}_{x_i} \times \hat{A}_{i+1,K} \times \dots \times \hat{A}_{r,K}$$

où $\mathfrak{m}_{x_i} \subset \hat{A}_{i,K}$ est maximal, on a, pour $f = (f_1, \dots, f_r) \in \hat{A}_K = \prod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \hat{A}_{i,K}$,

$$\begin{aligned}f(x) &:= f \bmod \mathfrak{m}_x \text{ dans } K_x := \hat{A}_K / \mathfrak{m}_x \simeq \hat{A}_{i,K} / \mathfrak{m}_{x_i} = K_{x_i} \\ &= f_i \bmod \mathfrak{m}_{x_i} =: f_i(x_i) \text{ dans } K_{x_i} .\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\left(\overset{\circ}{\hat{A}_K}\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \left(\overset{\circ}{\hat{A}_{i,K}}\right)$$

et

$$\left(\overset{\vee}{\hat{A}_K}\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \left(\overset{\vee}{\hat{A}_{i,K}}\right) .$$

Pour démontrer la proposition on est donc ramené au cas \hat{A} intégralement clos. En se donnant une présentation de la \mathcal{V} -algèbre A

$$\hat{A} \simeq \mathcal{V}\{T_1, \dots, T_n\} / \mathfrak{A} ,$$

on note t_i l'image de T_i dans \hat{A} ; la K -algèbre de Tate \hat{A}_K s'écrit

$$\hat{A}_K \simeq K\{T_1, \dots, T_n\} / \mathfrak{A}_K ,$$

de sorte que

$$\hat{A}_K \simeq K\{t_1, \dots, t_n\} .$$

D'après Tate [Ta, remarques entre les lemmes 6.2 et 6.3 affirmant la validité du corollaire 2, §5, dans le cas \mathcal{V} noethérien] le sous-ensemble $\left(\overset{\circ}{\hat{A}_K}\right)$ de \hat{A}_K est la fermeture intégrale de $\mathcal{V}\{t_1, \dots, t_n\}$ dans \hat{A}_K : or les injections évidentes

$$\mathcal{V}\{t_1, \dots, t_n\} \hookrightarrow \hat{A} \hookrightarrow \left(\overset{\circ}{\hat{A}_K}\right)$$

et le fait que \hat{A} est intégralement clos prouvent que

$$\left(\overset{\circ}{\hat{A}_K}\right) = \hat{A} .$$

Puisque $\left(\overset{\vee}{\hat{A}_K}\right)$ est un sous-ensemble de $\left(\overset{\circ}{\hat{A}_K}\right)$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \left(\overset{\vee}{\hat{A}_K}\right) &= \{f \in \hat{A}_K / \forall x \in \text{Spm } \hat{A}_K, |f(x)| < 1\} \\ &= \{f \in \hat{A}_K / \forall x \in \text{Spm } \hat{A}_K, f \in \mathfrak{m}_{\text{sp}(x)}\} \\ &= \text{Rad } \hat{A} , \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la surjectivité du morphisme de spécialisation

$$sp: \text{Max } \hat{A}_K \rightarrow \text{Max } \hat{A}, x \mapsto \{\mathfrak{m}_{sp(x)}\}.$$

Or A_0 étant un anneau de Jacobson [Bour, AC V, §3, n° 4, déf 1 et théo 3] on a

$$\text{Nilrad}(A_0) = \text{Rad } A_0,$$

d'où $\text{Rad } A_0 = \{0\}$ puisque A_0 est réduit, ce qui équivaut à $\text{Rad } \hat{A} = \pi \hat{A}$; par suite

$$\left(\hat{A}_K \right)^\vee = \text{Rad } \hat{A} = \pi \hat{A}. \quad \square$$

Si B est un anneau, $\mathcal{J}(B)$ désigne l'ensemble des idéaux de B et, pour $I \in \mathcal{J}(B)$, $\text{Rad}(I) := \text{Nilrad}(B/I)$ est le radical de I

$$\text{Rad}(I) = \{b \in B / \exists \alpha \in \mathbb{N}, b^\alpha \in I\} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{P} \supset I \\ \mathfrak{P} \in \text{Spec } B}} \mathfrak{P}.$$

Pour $I \in \mathcal{J}(\hat{A}_K)$ on note avec [B-G-R, 1.2.5]

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{I} &= I \cap (\hat{A}_K)^\circ = I \cap \hat{A}, \\ \overset{\vee}{I} &= I \cap (\hat{A}_K)^\vee = I \cap (\pi \hat{A}), \\ \tilde{I} &= \overset{\circ}{I} / \overset{\vee}{I}. \end{aligned}$$

Cette notation étend celle du début du §3.2 utilisée pour $\mathfrak{m}_x \in \text{Max } \hat{A}_K$:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\mathfrak{m}}_x &= \mathfrak{m}_x \cap (\pi \hat{A}) \hookrightarrow \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_x \cap \hat{A} \\ \tilde{\mathfrak{m}}_x &= \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x / \overset{\vee}{\mathfrak{m}}_x. \end{aligned}$$

Par analogie avec [B-G-R, 2.1.10, 7.1.5] nous définissons l'application de réduction *red* par

$$\begin{aligned} \text{red}: \text{Spm } \hat{A}_K &\longrightarrow \mathcal{J}(A_0) \\ x = \{\mathfrak{m}_x\} &\longmapsto \text{red}(x) := \tilde{\mathfrak{m}}_x = \rho(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x) = \rho(< \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x >). \end{aligned}$$

D'après nos descriptions précédentes des éléments à puissances bornées (resp des éléments topologiquement nilpotents) de \hat{A}_K , les réductions $\tilde{\mathfrak{m}}_x$ et

\widetilde{K}_x au sens de [B-G-R, 1.2.5, 2.1.10] de \hat{A}_K et $K_x = \hat{A}_K/\mathfrak{m}_x$ respectivement (pour $x \in Spm \hat{A}_K$) s'écrivent

$$\begin{aligned}\widetilde{\hat{A}_K} &:= \left(\hat{A}_K \right) / \left(\hat{A}_K \right)^\circ = \hat{A} / \pi \hat{A} = A_0 , \\ \widetilde{K}_x &:= \mathcal{V}_x / \mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x} =: k(\mathcal{V}_x) ,\end{aligned}$$

et la réduction $\widetilde{\theta}_x$ au sens de [B-G-R, §6.3] du morphisme canonique

$$\theta_x : \hat{A}_K \twoheadrightarrow K_x = \hat{A}_K / \mathfrak{m}_x$$

s'identifie au morphisme composé

$$\widetilde{\theta}_x : A_0 = \hat{A} / \pi \hat{A} \xrightarrow{\widetilde{\psi}_x} k(R_x) \xrightarrow{\widetilde{i}_x} k(\mathcal{V}_x) = \mathcal{V}_x / \mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x} .$$

Le morphisme $\ll \pi \gg$ de [B-G-R, §7.1.5] est le morphisme

$$\begin{aligned}\ll \pi \gg : Spm \hat{A}_K &\longrightarrow Max A_0 \\ x = \{\mathfrak{m}_x\} &\longmapsto Ker \widetilde{\theta}_x = Ker \widetilde{\psi}_x ;\end{aligned}$$

or

$$Ker \widetilde{\theta}_x = Ker \widetilde{\psi}_x = \rho(\mathfrak{m}_{sp(x)}) =: \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} ,$$

donc **ce morphisme $\ll \pi \gg$ de Bosch-Güntzer-Remmert [B-G-R]** (qu'il ne faut pas confondre avec notre uniformisante π) **s'identifie au morphisme de spécialisation**

$$\overline{sp} : Max \hat{A}_K \rightarrow Max A_0$$

dont on retrouve la surjectivité dans [B-G-R, §7.1.5, theo 4].

Nous allons comparer dans la proposition (3.2.4.2) ci-dessous les morphismes *red* et $\ll \pi \gg$ en donnant une CNS pour que $\widetilde{\mathfrak{m}}_x$ soit maximal et de ce fait coïncide avec $\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)}$, i.e. on donnera une CNS pour que l'injection canonique

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_x = \widetilde{Ker \theta_x} \hookrightarrow Ker \widetilde{\theta}_x = Ker \widetilde{\psi}_x = \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)}$$

soit un isomorphisme ; la proposition 1 de [B-G-R, §7.1.5] qui donne la condition suffisante $n = [K_x : K] = 1$ en est un cas particulier.

Dans le §3.2.2 sur le lien entre Teichmüller et la spécialisation on a constaté qu'avec $x = Teich_{\hat{A}_K}(x_0)$ on a

$$(i) \quad < \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x > = \mathfrak{m}_{sp(x)}$$

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_x \text{ est une extension algébrique finie non ramifiée de } K , \\ \text{le corps résiduel } \widetilde{K}_x \text{ de } K_x \text{ est un quotient de } A_0 . \end{array} \right.$$

En fait ces deux propriétés (i) et (ii) sont équivalentes comme nous allons le voir aussi dans la proposition (3.2.4.2) ci-dessous.

Proposition (3.2.4.2). *Soient A une \mathcal{V} -algèbre lisse, $x \in \mathcal{X}_K = \text{Spm } \hat{A}_K$, correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x \subset \hat{A}_K$, $K_x = \hat{A}_K / \mathfrak{m}_x$, $\mathring{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_x \cap \hat{A}$, $R_x = \hat{A} / \mathring{\mathfrak{m}}_x$, \mathfrak{m}_{R_x} l'idéal maximal de R_x , \mathcal{V}_x l'anneau de valuation de K_x , $\widetilde{K}_x := \mathcal{V}_x / \mathfrak{m}_{\mathcal{V}_x} =: k(\mathcal{V}_x)$ le corps résiduel de \mathcal{V}_x , $\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} := \rho(\mathfrak{m}_{sp(x)})$, $\widetilde{\mathfrak{m}}_x = \rho(\mathring{\mathfrak{m}}_x) = \rho(< \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_x >)$. Alors on a :*

- 1) $\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \text{Rad}(\widetilde{\mathfrak{m}}_x)$.
- 2) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
 - (i) $\widetilde{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)}$, i.e. $\widetilde{\text{red}}(x) = \overline{sp}(x)$, i.e. $\widetilde{\text{Ker } \theta_x} \simeq \text{Ker } \widetilde{\theta}_x$.
 - (i)' $\widetilde{\mathfrak{m}}_x = \text{Rad}(\widetilde{\mathfrak{m}}_x)$.
 - (ii) $< \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_x > = \mathfrak{m}_{sp(x)}$, i.e. $< \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_x >$ est égal à son radical.
 - (iii) $\widetilde{\mathfrak{m}}_x$ est un idéal maximal.
 - (iii)' $< \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_x >$ est un idéal maximal.
 - (iv) $\widetilde{\mathfrak{m}}_x$ est un idéal premier.
 - (iv)' $< \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_x >$ est un idéal premier.
 - (v) $R_x / \pi R_x = A_0 / \widetilde{\mathfrak{m}}_x$ est un corps, i.e. π engendre l'idéal maximal de R_x .
 - (v)' $R_x / \pi R_x = A_0 / \widetilde{\mathfrak{m}}_x$ est un anneau intègre.
 - (v)'' $R_x / \pi R_x = A_0 / \widetilde{\mathfrak{m}}_x$ est un anneau réduit.
 - (vi) L'adhérence schématique de x dans $\text{Spec } \hat{A}$ intersecte la fibre spéciale $\text{Spec } A_0$ selon un schéma intègre.
 - (vi)' L'adhérence schématique de x dans $\text{Spec } \hat{A}$ intersecte la fibre spéciale $\text{Spec } A_0$ selon un schéma réduit.
 - (vii) K_x est une extension algébrique finie non ramifiée de K et le corps résiduel \widetilde{K}_x de K_x est un quotient de A_0 .
 - (vii)' K_x est une extension algébrique finie non ramifiée de K et la réduction \widetilde{K}_x de K_x est le corps résiduel d'un point fermé de la réduction $X_0 = \text{Spec } A_0$ de $\mathcal{X}_K = \text{Spm } \hat{A}_K$.
 - (viii) \mathcal{V}_x est une extension non ramifiée de \mathcal{V} et c' est un quotient de \hat{A} .
 - (viii)' \mathcal{V}_x est une extension non ramifiée de \mathcal{V} et $k(R_x) = k(\mathcal{V}_x)$.
 - (ix) R_x est un anneau de valuation discrète avec π pour uniformisante.
 - (ix)' R_x est une extension non ramifiée de \mathcal{V} .
 - (ix)'' R_x est une extension finie étale de \mathcal{V} .

Démonstration.

1) Puisque $\pi R_x \subset \mathfrak{m}_{R_x}$ on a $\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle \subset \mathfrak{m}_{sp(x)}$, d'où

$$\tilde{\mathfrak{m}}_x = \rho(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x) = \rho(\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle) \subset \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} := \rho(\mathfrak{m}_{sp(x)}) ;$$

or il résulte de l'égalité $Spec R_x = \{(0), \mathfrak{m}_{R_x}\}$ que $\mathfrak{m}_{sp(x)}$ est le seul idéal premier de \hat{A} contenant $\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle$, d'où l'égalité

$$\mathfrak{m}_{sp(x)} = Rad (\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle)$$

grâce à [B-G-R, 7.1.3, prop 1], et par suite

$$\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = Rad (\tilde{\mathfrak{m}}_x) .$$

2) L'équivalence de (i) et (i)' résulte du 1) et celle de (i) et (ii) est tautologique.

Dire que $\tilde{\mathfrak{m}}_x = \rho(\overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x) = \rho(\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle)$ est premier (resp maximal) équivaut à dire que $\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle$ est premier (resp maximal), i.e. l'anneau artinien local $R_x/\pi R_x = A_0/\tilde{\mathfrak{m}}_x = \hat{A}/\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle$ est intègre (resp un corps) ; d'où l'équivalence de (iii), (iii)', (iv), (iv)', (v), (v)'.

L'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\overline{R}_x}$ de l'anneau artinien local $\overline{R}_x = R_x/\pi R_x$ est l'ensemble des éléments nilpotents de \overline{R}_x [Bour, A, chap 8, §6, n° 4, cor du théo 3] ; d'où l'équivalence de (v), (v)'.

L'assertion (v) qui équivaut à dire que π engendre l'idéal maximal \mathfrak{m}_{R_x} de l'anneau local R_x , ou encore, par définition de $\mathfrak{m}_{sp(x)} := \psi_x^{-1}(\mathfrak{m}_{R_x})$, que $\langle \pi, \overset{\circ}{\mathfrak{m}}_x \rangle = \mathfrak{m}_{sp(x)}$; d'où l'équivalence de (ii) et (v).

Grâce à l'interprétation géométrique de la spécialisation vue ci-dessus l'intersection de l'adhérence schématique de x dans $Spec \hat{A}$ avec la fibre spéciale $Spec A_0$ est le schéma artinien local $Spec R_x/\pi R_x$; d'où l'équivalence de (v)'' et (vi)' et celle de (v)' et (vi).

Montrons (ii) \implies (vii). D'après (ii) l'idéal maximal de R_x est engendré par π , donc l'anneau local noethérien intègre R_x est un anneau de valuation discrète [Se, chap 1, §2, prop 2]. Comme K_x est le corps des fractions de R_x , il en résulte que $R_x = \mathcal{V}_x$ [Bour., AC, VI, §1, n° 2, théo 1] ; et du fait que le corps résiduel $k(sp(x)) = R_x/\mathfrak{m}_{R_x}$ de R_x est un quotient de A_0 , celui de

\mathcal{V}_x en est un aussi. De plus on sait [B3, (0.2.2)] ou [B-G-R, §6.1.2, cor 3 du theo 1] que K_x est une extension algébrique finie de K , et on vient de voir qu'elle est non ramifiée puisque π est une uniformisante de \mathcal{V}_x . D'où (vii).

Réciproquement montrons que (vii) \implies (ii). D'après (vii) le corps résiduel $k(\mathcal{V}_x) = \mathcal{V}_x/\pi\mathcal{V}_x$ de \mathcal{V}_x est un quotient de A_0 ; par conséquent le morphisme

$$\bar{i}_x : R_x/\pi R_x \rightarrow \mathcal{V}_x/\pi\mathcal{V}_x$$

est une surjection entre deux k -espaces vectoriels de même dimension $n = [K_x : K]$, donc c'est un isomorphisme. Par suite [EGA 0_I, (6.6.21)]

$$i_x : R_x \hookrightarrow \mathcal{V}_x$$

est un isomorphisme; donc π engendre \mathfrak{m}_{R_x} , d'où (ii).

L'équivalence de (vii) et (vii)' est tautologique.

Clairement (viii) \implies (vii). Réciproquement supposons (vii); alors \mathcal{V}_x est non ramifié sur \mathcal{V} . Or on a vu ci-dessus dans la démonstration de l'équivalence de (ii) et (vii) que la propriété (vii) implique que

$$i_x : R_x \hookrightarrow \mathcal{V}_x$$

est un isomorphisme, donc \mathcal{V}_x est un quotient de \hat{A} au même titre que $R_x = \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}_x$; d'où (viii).

Montrons (viii) \implies (viii)'. Comme \mathcal{V}_x est un quotient de \hat{A} , l'injection

$$\tilde{i}_x : k(R_x) \hookrightarrow k(\mathcal{V}_x)$$

est une surjection, donc c'est un isomorphisme.

Réciproquement montrons que (viii)' \implies (viii). Puisque \mathcal{V}_x est une extension non ramifiée de \mathcal{V} , l'injection $i_x : R_x \hookrightarrow \mathcal{V}_x$ est non ramifiée [EGA IV, (17.3.3)(v)], et comme \tilde{i}_x est bijective par hypothèse, l'injection

$$i_x : R_x \hookrightarrow \mathcal{V}_x$$

est surjective [SGA1, I, cor 7.5], d'où (viii).

L'équivalence de (viii) et (ix) provient du fait que \mathcal{V}_x est un anneau de valuation qui domine l'anneau local intègre R_x en ayant même corps des

fractions.

L'équivalence de (ix) et $(ix)'$ provient de [EGA IV, (17.4.1) d'')] et [Se, chap I, §2, prop 2] et celle de $(ix)'$ et $(ix)''$ est claire. \square

Comme nous allons le voir ci-dessous les points x qui vérifient les propriétés équivalentes de (3.2.4.2)2) sont les points à bonne réduction au sens suivant :

Définition (3.2.4.3). Soit A une \mathcal{V} -algèbre lisse, $\mathcal{X}_K := \text{Spm } \hat{A}_K$ et $x \in \mathcal{X}_K$ correspondant à un morphisme $\hat{A}_K \rightarrow K_x := \hat{A}_K/\mathfrak{m}_x$. On dit que x a bonne réduction si et seulement si il existe une \mathcal{V} -algèbre lisse R qui est un quotient de \hat{A} et un K -isomorphisme $R_K := R \otimes_{\mathcal{V}} K \simeq K_x$.

Proposition (3.2.4.4). Avec les notations précédentes on a :

(i) Si $x \in \mathcal{X}_K$ a bonne réduction, alors :

Il existe un \mathcal{V} -isomorphisme $R \simeq R_x := \hat{A}/\mathfrak{m}_x^\circ$,

R_x est une \mathcal{V} -algèbre intègre finie étale,

$\overline{sp}(x) = \text{red}(x)$.

(ii) Réciproquement, si $\overline{sp}(x) = \text{red}(x)$ alors x a bonne réduction.

Démonstration.

(i) Supposons que $x \in \mathcal{X}_K$ a bonne réduction et choisissons une présentation $R \simeq \mathcal{V}[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{J}$ de la \mathcal{V} -algèbre lisse R . Comme R est plate sur \mathcal{V} , elle s'injecte dans $R_K \simeq K_x$, donc R est intègre ; de plus R étant normal [EGA IV, (17.5.7)] il en résulte que R est intégralement clos de corps des fractions la K -algèbre finie K_x . Notons $x_i \in R \hookrightarrow K_x$ l'image de X_i dans R : x_i est entier sur K , donc il existe un entier $r_i \in \mathbb{N}$ et des éléments $\lambda_{i,j} \in K$ pour $j \in \llbracket 0, r_i \rrbracket$ tels que $\lambda_{i,r_i} = 1$ et

$$\star \quad \sum_{j=0}^{j=r_i} \lambda_{i,j} x_i^j = 0.$$

En multipliant par une puissance ad hoc de π il existe pour tout i un entier $d_i \in \mathbb{N}$ tel que les $\lambda_{i,j} \pi^{d_i}$, $j \in \llbracket 0, r_i \rrbracket$, soient des éléments de \mathcal{V} premiers entre eux. Si $\lambda_{i,0} \pi^{d_i} =: \mu_{i,0}$ était le seul des $\lambda_{i,j} \pi^{d_i}$, $j \in \llbracket 0, r_i \rrbracket$, à ne pas être multiple de π , en réduisant modulo π on aurait $\overline{\mu_{i,0}} = \overline{0}$, ce qui est absurde. Donc au moins un des $\lambda_{i,j} \pi^{d_i}$, $j \in \llbracket 1, r_i \rrbracket$, est inversible : en réduisant modulo π l'équation \star on en déduit que $\overline{x_i} := x_i \bmod \pi$ est entier sur k . En faisant

cela pour chaque i il en résulte que la k -algèbre de type fini $R/\pi R$ est entière, donc elle est finie. Or $R_K \simeq K_x$ est fini sur K , donc R est quasi-fini sur \mathcal{V} [R, chap IV, prop 3]. En notant B la fermeture intégrale de \mathcal{V} dans R on sait alors par Raynaud [R, chap IV, cor 2 du théo 1] que $\text{Spec } R \hookrightarrow \text{Spec } B$ est une immersion ouverte. Puisque R est intégralement clos de corps des fractions K_x , B est aussi la fermeture intégrale de \mathcal{V} dans K_x , donc B est un anneau de valuation discrète [Se, chap II, §2, prop 3], c'est l'anneau de valuation $B = \mathcal{V}_x$ de K_x et c'est aussi une \mathcal{V} -algèbre finie [loc cit].

Le morphisme composé

$$\text{Spec } R/\pi R \hookrightarrow \text{Spec } B/\pi B \rightarrow \text{Spec } k$$

étant fini étale, l'immersion ouverte

$$\text{Spec } R/\pi R \hookrightarrow \text{Spec } B/\pi B$$

est finie, c'est donc une immersion fermée ; par suite $R/\pi R$ est un quotient de l'algèbre locale $B/\pi B$ [Bour, A I, §8, prop 5 d)] et c'est aussi un anneau local [loc cit]. De plus le morphisme fini $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } \mathcal{V}$ envoie le point fermé $\{\mathfrak{m}_B\} = \{\pi_B B\}$ sur le point fermé $\{\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}\} = \{\pi \mathcal{V}\}$, i.e. $\mathfrak{m}_B \cap \mathcal{V} = \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$, d'où $\pi \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$, ce qui fournit une égalité entre idéaux de B , $\langle \pi \rangle = \langle \pi_B^e \rangle$ pour un certain entier $e \in \mathbb{N}$. Ainsi $B/\pi B = B/\pi_B^e B$ est artinien local, donc $R/\pi R$ est également artinien local. En particulier l'immersion ouverte

$$\text{Spec } R/\pi R = \{\mathfrak{P}\} \hookrightarrow \text{Spec } B/\pi B = \{\mathfrak{P}'\}$$

est surjective, c'est donc un isomorphisme, d'où un isomorphisme :

$$\star\star \quad B/\pi B \xrightarrow{\sim} R/\pi R.$$

Or R , muni de la topologie π -adique, est un sous-espace topologique de l'espace topologique K_x qui est séparé (et complet) pour la topologie π -adique, donc R est séparé pour la topologie π -adique. De plus, comme R est plat sur \mathcal{V} et que B est séparé et complet pour la topologie π -adique en tant que \mathcal{V} -algèbre finie, l'isomorphisme $\star\star$ nous permet de conclure que l'injection

$$B \hookrightarrow R$$

est un isomorphisme [EGA 0_I, (6.6.21)]. En particulier R est un anneau de valuation discrète et une \mathcal{V} -algèbre finie étale : ainsi π est une uniformisante de R . Comme la flèche composée

$$\hat{A} \twoheadrightarrow R_x \hookrightarrow B = R = \mathcal{V}_x$$

est surjective, on obtient l'isomorphisme

$$R_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_x ;$$

d'où $\overline{sp}(x) = \text{red}(x)$ d'après (3.2.4.2)(ix)', ce qui démontre (i).

(ii) Réciproquement si $\overline{sp}(x) = \text{red}(x)$, alors R_x est un anneau de valuation discrète fini étale sur \mathcal{V} d'après (3.2.4.2)(ix)'', donc x a bonne réduction. \square

Proposition (3.2.4.5). *Sous les hypothèses et notations de (3.2.4.2) les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $R_x = \mathcal{V}_x$.
- (i)' \mathcal{V}_x est un quotient de \hat{A} .
- (ii) R_x est un anneau de valuation discrète.
- (iii) L'injection $i_x : R_x \hookrightarrow \mathcal{V}_x$ est non ramifiée et $k(R_x) = k(\mathcal{V}_x)$.
- (iv) Le morphisme $i_x^\# : \text{Spec } \mathcal{V}_x \rightarrow \text{Spec } R_x$ est non ramifié et radiciel.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (i)' est claire et celle de (i) et (iii) résulte de [SGA1, I, cor 7.5]. L'équivalence de (i) et (ii) provient du fait que \mathcal{V}_x est un anneau de valuation qui domine l'anneau local intègre R_x et a même corps des fractions que lui. L'équivalence de (iii) et (iv) résulte de [EGA 0_{IV}, (23.2.2)] puisque k est un corps parfait. \square

Corollaire (3.2.4.6). *Sous les hypothèses et notations de (3.2.4.2) soit $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$ un point fermé de $\text{Spec } A_0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $x \in \text{red}^{-1}(x_0) := \{x \in \mathcal{X}_K / \text{red}(x) = x_0\}$.
- (ii) R_x est un anneau de valuation discrète d'uniformisante π et $k(R_x) = k(x_0)$.
- (iii) R_x est non ramifié sur \mathcal{V} et $k(R_x) = k(x_0)$.
- (iv) \mathcal{V}_x est non ramifié sur \mathcal{V} et $k(\mathcal{V}_x) = k(x_0)$.
- (v) K_x est non ramifié sur K et $\widetilde{K}_x = k(x_0)$.

Démonstration. Résulte de (3.2.4.2) et (3.2.4.5). \square

Description des tubes via des morphismes

Proposition (3.2.4.7). *Sous les hypothèses et notations de (3.2.4.2) soit $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$ un point fermé de $\text{Spec } A_0$. Alors*

- (i) $\text{red}^{-1}(x_0)$ s'identifie à l'ensemble (non vide) des relèvements (nécessairement surjectifs) $\hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x_0)$ du morphisme $A_0 \twoheadrightarrow k(x_0)$ donné avec x_0 ;
- (ii) En particulier $\overline{sp} : \text{Max } \hat{A}_K \rightarrow \text{Max } A_0$ est surjectif.
- (iii) Parmi ces relèvements du (i) il en existe un et un seul qui commute aux Frobenius, c'est le relèvement de Teichmüller :

$$\text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0) \subset]x_0[:= \overline{sp}^{-1}(x_0)$$

$$\text{red}(\text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)) = \overline{sp}(\text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)) = x_0 .$$

Démonstration. Si $x \in \text{red}^{-1}(x_0)$, alors $\hat{A} \twoheadrightarrow R_x$ est un relèvement de $A_0 \twoheadrightarrow k(x_0)$ et il existe un unique \mathcal{V} -isomorphisme $R_x \simeq \mathcal{V}(x_0)$ relevant l'identité de $k(x_0)$ [EGA IV, (18.3.2)]. Réciproquement la lissité formelle de \hat{A} sur \mathcal{V} nous assure de l'existence de tels relèvements $\hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x_0)$ du morphisme $A_0 \twoheadrightarrow k(x_0)$; alors l'image R_x de \hat{A} dans $\mathcal{V}(x_0)$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante π et $k(R_x) = k(x_0)$, donc $x \in \text{red}^{-1}(x_0)$ d'après (3.2.4.6).

Le reste de la proposition est clair car $x = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)$ vérifie les propriétés de (3.2.4.6) (cf aussi 3.2.2). \square

Pour $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$ un point fermé de $\text{Spec } A_0$, nous allons donner une description du tube $]x_0[:= \overline{sp}^{-1}(x_0)$ qui fournira encore la surjectivité de \overline{sp} en exhibant des antécédents de \overline{sp} en dehors de $\text{red}^{-1}(x_0)$.

Soit donc $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$. Si $x \in]x_0[$, on a vu que $R_x = \hat{A}/\mathfrak{m}_x^\circ$ est une \mathcal{V} -algèbre intègre finie et plate (ce qui implique que R_x est local et $\text{Spec } R_x = \{(0), \mathfrak{m}_{R_x}\}$) à corps résiduel $R_x/\mathfrak{m}_{R_x} = k(x_0)$.

Inversement, soit \mathcal{V}' une \mathcal{V} -algèbre intègre finie et plate, donc locale, de corps résiduel $k(x_0)$. Notons que sur \mathcal{V}' les topologies π -adiques et $\mathfrak{m}_{\mathcal{V}'}$ coïncident puisque l'idéal maximal de l'anneau local artinien $\mathcal{V}'/\pi\mathcal{V}'$ est nilpotent. Par lissité formelle de \hat{A} sur \mathcal{V} , il existe (au moins) un morphisme $\hat{A} \rightarrow \mathcal{V}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \twoheadrightarrow & k(x_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{A} & \twoheadrightarrow & \mathcal{V}' \end{array} .$$

L'image R' de \hat{A} dans \mathcal{V}' est elle aussi une \mathcal{V} -algèbre intègre finie et plate, donc locale : de plus le corps résiduel $k(R') = R'/\mathfrak{m}_{R'}$ est isomorphe à $k(x_0) =$

$\mathcal{V}'/\mathfrak{m}_{\mathcal{V}'}$ car dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
A_0 & \twoheadrightarrow & R'/\mathfrak{m}_{R'} & \hookrightarrow & k(x_0) = \mathcal{V}'/\mathfrak{m}_{\mathcal{V}'} \\
\parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
A_0 & \twoheadrightarrow & R'/\pi R' & \longrightarrow & \mathcal{V}'/\pi \mathcal{V}' \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\hat{A} & \twoheadrightarrow & R' & \hookrightarrow & \mathcal{V}'
\end{array}$$

la flèche composée horizontale du haut est surjective par hypothèse. Ainsi on a prouvé :

Proposition (3.2.4.8). *Sous les hypothèses et notations de (3.2.4.2) soit $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$ un point fermé de $\text{Spec } A_0$. Alors :*

$]x_0[= sp^{-1}(x_0)$ s'identifie à l'ensemble (non vide) des morphismes $\hat{A} \rightarrow \mathcal{V}'$ qui factorisent la surjection $\hat{A} \twoheadrightarrow k(x_0)$ donnée avec x_0 ,

où \mathcal{V}' parcourt l'ensemble des \mathcal{V} -algèbres intègres finies et plates à corps résiduel $k(x_0)$.

L'étude de la boule unité fermée de la droite affine rigide que nous allons entreprendre au §3.3 nous fournira ensuite au §3.4 des exemples explicites de points

$$x \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0)$$

qui sont dans le tube de x_0 sans être dans $\text{red}^{-1}(x_0)$.

Description des tubes via des équations

Soit $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$ un point fermé de $\text{Spec } A_0$, $x = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)$ et f_1, \dots, f_r des générateurs de l'idéal (de type fini) $\mathring{\mathfrak{m}}_x$ de \hat{A} . Puisque

$$\mathfrak{m}_{x_0} = \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \rho(\mathring{\mathfrak{m}}_x)$$

on a la description suivante du tube $]x_0[:= \overline{sp}^{-1}(x_0)$ de x_0 [B3, (1.1.1)] :

$$]x_0[= \{z \in \mathcal{X}_K / \forall i = 1, \dots, r, |f_i(z)| < 1\}.$$

Pour $z = x = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)$ on a $f_i(x) := f_i \bmod \mathring{\mathfrak{m}}_x = 0$; donc non seulement on a prouvé que

$$x = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0) \in]x_0[= \{z \in \mathcal{X}_K / \forall i = 1, \dots, r, |f_i(z)| < 1\},$$

ce qui est vrai pour toute section de \overline{sp} , mais même que $x = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(x_0)$ est «au centre» du tube de $]x_0[$, i.e. que

$$\forall i = 1, \dots, r \quad f_i(x) = 0 .$$

Plus généralement, cette propriété s'étend à tous les $y \in \text{red}^{-1}(x_0)$ à condition de changer de générateurs pour $\mathring{\mathfrak{m}}_y$: en effet, pour g_1, \dots, g_s des générateurs de $\mathring{\mathfrak{m}}_y$, on a :

$$]x_0[= \{z \in \mathcal{X}_K / \forall i = 1, \dots, r, |f_i(z)| < 1\} = \{z \in \mathcal{X}_K / \forall j = 1, \dots, s, |g_j(z)| < 1\}$$

et

$$\forall j = 1, \dots, s, \quad g_j(y) := g_j \bmod \mathring{\mathfrak{m}}_y = 0 .$$

On peut formaliser cette constatation dans la proposition suivante :

Proposition (3.2.4.9). *Sous les hypothèses et notations de (3.2.4.2) soit $x_0 \in |\text{Spec } A_0|$ un point fermé de $\text{Spec } A_0$. Alors*

$$\text{red}^{-1}(x_0) = \{x \in \mathcal{X}_K / \exists J_x \subset \mathbb{N} \text{ fini}, \forall i \in J_x \exists f_i \in \hat{A}, \text{ tel que}$$

$$x_0 = V(\overline{f}_i, i \in J_x) \text{ où } \overline{f}_i := f_i \bmod \pi \hat{A}$$

$$\text{et } x \in V(f_i, i \in J_x)\} .$$

Démonstration. En notant \mathcal{E} l'ensemble second membre dans l'égalité ci-dessus, on a déjà prouvé que $\text{red}^{-1}(x_0) \subset \mathcal{E}$. Réciproquement, soit $x \in \mathcal{E}$. Les \overline{f}_i , $i \in J_x$, forment par hypothèse un système de générateurs de l'idéal \mathfrak{m}_{x_0} de A_0 tels que $f_i(x) := f_i \bmod \mathring{\mathfrak{m}}_x = 0$ donc, pour tout $i \in J_x$, $f_i \in \mathring{\mathfrak{m}}_x$ et $x \in]x_0[= \{z \in \mathcal{X}_K / \forall i \in J_x, |f_i(x)| < 1\}$. En particulier $\overline{sp}(x) = x_0$ et

$$\mathfrak{m}_{x_0} \subset \rho(\mathring{\mathfrak{m}}_x) =: \tilde{\mathfrak{m}}_x ;$$

comme on a toujours l'inclusion

$$\tilde{\mathfrak{m}}_x = \rho(\mathring{\mathfrak{m}}_x) \subset \mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \mathfrak{m}_{x_0}$$

on a l'égalité $\tilde{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_{x_0}$, i.e. $\text{red}(x) = x_0$. \square

De manière imagée on peut dire que les $x \in \text{red}^{-1}(x_0)$ sont «au centre» du tube $]x_0[$, au sens où, pour un choix judicieux de générateurs f_i de \mathfrak{m}_x , on a $f_i(x) = 0$, alors que

$$]x_0[= \{z \in \mathcal{X}_K / \forall i = 1, \dots, r, |f_i(z)| < 1\} .$$

3.3. $Spm K\{T\}$: la boule unité de la droite affine rigide

3.3.1. Les points de $Spm K\{T\}$

Rappelons pour mémoire le lemme évident suivant :

Lemme (3.3.1.1). *Les éléments inversibles de $\mathcal{V}\{T\}$ sont les éléments de*

$$\mathcal{V}\{T\}^* = U + \pi\mathcal{V}\{T\}$$

où $U = \mathcal{V} \setminus \pi\mathcal{V}$ est l'ensemble des éléments inversibles de \mathcal{V} .

Nous avons vu [B3, (0.2.2)] que les points de $Spm K\{T\}$ sont en bijection avec les quotients $\mathcal{V}\{T\}/I$ qui sont des \mathcal{V} -algèbres intègres finies et plates. Par exemple, soit $P(T) \in \mathcal{V}[T]$ un polynôme unitaire irréductible dans $\mathcal{V}[T]$ et posons $I = P(T)\mathcal{V}\{T\}$, $\tilde{I} = P(T)\mathcal{V}[T]$; par factorialité de $\mathcal{V}[T]$, \tilde{I} est premier et la flèche naturelle

$$\tilde{R} := \mathcal{V}[T]/\tilde{I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}\{T\}/I := R$$

est un isomorphisme de \mathcal{V} -algèbres finies intègres; et puisque $P(T)$ est unitaire, \tilde{R} est plate sur \mathcal{V} [Mi, chap I, Rk 2.6 a)], donc R correspond à un point de $Spm \mathcal{V}\{T\}$. Nous allons montrer ci-dessous qu'en fait tous les points de $Spm K\{T\}$ sont de cette forme.

Considérons en effet un idéal $I \subset \mathcal{V}\{T\}$ tel que $\mathcal{V}\{T\}/I$ soit une \mathcal{V} -algèbre intègre finie et plate.; notons \bar{I} l'image canonique de I dans $k[T]$. Par platitude de $\mathcal{V}\{T\}/I$ sur \mathcal{V} , on a $Tor_1^{\mathcal{V}}(\mathcal{V}\{T\}/I, \mathcal{V}/\pi\mathcal{V}) = 0$, donc on a un isomorphisme

$$I \otimes_{\mathcal{V}} k = I/\pi I \xrightarrow{\sim} \bar{I} \subset k[T],$$

ce qui permet d'identifier $I/\pi I$ à son image \bar{I} dans $k[T]$ qui est un idéal principal : on choisit pour générateur de l'idéal \bar{I} le générateur unitaire $\bar{f} = \sum_{i=0}^{i=d} \bar{a}_i T^i$, $\bar{a}_i \in k, \bar{a}_d = 1$. Via Nakayama, puisque $Rad(\mathcal{V}\{T\}) = \pi \mathcal{V}\{T\}$ [(3.2.4.1)(ii)], que I est de type fini (par noethérianité de $\mathcal{V}\{T\}$ [Sal]) et que \bar{I} est principal engendré par \bar{f} , I est lui aussi principal, engendré par un $g \in I \subset \mathcal{V}\{T\}$ relevant \bar{f} . On écrit $g(T) = \pi^r h(T)$, où $r \in \mathbb{N}$ et la norme de Gauß $\|h\|$ de h est égale à 1 ([B-G-R, §1.4.1] si $h(T) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i T^i \in \mathcal{V}\{T\}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$, $\|h\| := \max |\alpha_i|$), et puisque $\bar{f} \neq 0$ on a $r = 0$. Alors [B-G-R, 5.2.1, def 1] $g(T) = h(T)$ est T -distingué d'un certain degré noté s ; par le théorème de préparation de Weierstraß [B-G-R, 5.2.2, theo 1] il existe un unique élément inversible $e(T) \in K\{T\}$ et un unique polynôme unitaire $\omega(T) \in \mathcal{V}[T]$ de degré s tels que $g(T) = e(T)\omega(T)$. Puisque $\|\omega\| =$

1 et $1 = \|g\| = \|e\| \times \|\omega\|$ [B-G-R, 5.1.2, prop 1] on a $\|e\| = 1$ et en fait $e(T) \in \mathcal{V}\{T\}$: si $e'(T)$ est un inverse de $e(T)$ dans $K\{T\}$ l'égalité $e(T) \times e'(T) = 1$ fournit $\|e\| \times \|e'\| = \|e'\| = 1$, donc $e'(T) \in \mathcal{V}\{T\}$ et $e(T)$ est inversible dans $\mathcal{V}\{T\}$. Par le lemme (3.3.1.1) l'élément $e(T)$ est de la forme $e(T) = u + \pi T v(T)$ avec $u \in \mathcal{V} \setminus \pi \mathcal{V}$ et $v(T) \in \mathcal{V}\{T\}$; or la réduction *mod* π de g est le polynôme unitaire \bar{f} , donc $e(T) \bmod \pi = 1$ et $\bar{f}(T) = \omega(T) \bmod \pi$: en particulier $s = d$ et par la factorialité de $\mathcal{V}\{T\}$ [Sal] $\omega(T)$ est irréductible dans $\mathcal{V}\{T\}$. Or les générateurs de l'idéal principal $I = \omega(T)\mathcal{V}\{T\}$ sont tous de la forme $e_1(T) \times \omega(T)$ où $e_1(T)$ est inversible dans $\mathcal{V}\{T\}$ donc de la forme $e_1(T) = u_1(1 + \pi v_1(T))$ avec $u_1 \in \mathcal{V} \setminus \pi \mathcal{V}$, $v_1(T) \in \mathcal{V}\{T\}$; par suite $\omega(T)$ est l'unique générateur irréductible dans $\mathcal{V}\{T\}$ de **I qui soit un polynôme unitaire de degré d =degré de \bar{f} , relevant \bar{f} , où \bar{f} est l'unique générateur unitaire de $\bar{I} = I \bmod \pi$: $\omega(T)$ est même irréductible dans $\mathcal{V}[T]$** d'après le lemme suivant :

Lemme (3.3.1.2). *Soit $\omega(T) \in \mathcal{V}[T]$, unitaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\omega(T)$ est irréductible dans $\mathcal{V}[T]$.
- (ii) $\omega(T)$ est irréductible dans $K[T]$.
- (iii) $\omega(T)$ est irréductible dans $\mathcal{V}\{T\}$.

Démonstration.

L'équivalence de (i) et (ii) est classique puisque les coefficients de $\omega(T)$ sont premiers entre eux.

Montrons l'équivalence (i) \iff (iii). Soit $I = \omega(T)\mathcal{V}\{T\}$, $\tilde{I} = \omega(T)\mathcal{V}[T]$; puisque $\omega(T)$ est unitaire la flèche naturelle

$$\star \quad \tilde{R} := \mathcal{V}[T]/\tilde{I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}\{T\}/I := R$$

est un isomorphisme. Or la factorialité de $\mathcal{V}[T]$ fournit l'équivalence

$$\omega(T) \text{ irréductible dans } \mathcal{V}[T] \iff \tilde{I} \text{ est premier ;}$$

de même la factorialité de $\mathcal{V}\{T\}$ [Sal] fournit l'équivalence

$$\omega(T) \text{ irréductible dans } \mathcal{V}\{T\} \iff I \text{ est premier .}$$

D'où l'équivalence du lemme grâce à l'isomorphisme \star ci-dessus. \square

Ainsi on a prouvé :

Proposition (3.3.1.3). *Les points de $\text{Spm } K\{T\}$ sont en bijection avec les polynômes unitaires irréductibles de $\mathcal{V}[T]$.*

Rappelons le théorème suivant de Robert :

Théorème (3.3.1.4) [Ro, chap 6, §2.2, theo 2]. *Tout $S(T) \in K\{T\}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$S(T) = \pi^r \times u \times (1 + \pi v(T)) \times \omega_1(T) \times \omega_2(T)$$

où

- (i) $r \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathcal{V}^* = \mathcal{V} \setminus \pi\mathcal{V}$, $v(T) \in \mathcal{V}\{T\}$,
- (ii) $\omega_1(T) \in \mathcal{V}[T]$, unitaire, $|\omega_1(0)| = 1$,
- (iii) $\omega_2(T) \in \mathcal{V}[T]$, unitaire, de degré μ , $\omega_2(T) \equiv T^\mu \pmod{\pi}$.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire (3.3.1.5).

- (i) *Les éléments inversibles de $K\{T\}$ sont les éléments de la forme*

$$S(T) = \pi^r \times u \times (1 + \pi v(T))$$

où

$$r \in \mathbb{Z}, u \in \mathcal{V}^* = \mathcal{V} \setminus \pi\mathcal{V}, v(T) \in \mathcal{V}\{T\}.$$

- (ii) *Aux inversibles près, les irréductibles de $K\{T\}$ sont les polynômes $\omega(T) \in \mathcal{V}[T]$, unitaires et irréductibles dans $\mathcal{V}[T]$.*
- (iii) *Aux inversibles près, les irréductibles de $\mathcal{V}\{T\}$ sont de deux sortes : l'élément π et les polynômes $\omega(T) \in \mathcal{V}[T]$, unitaires et irréductibles dans $\mathcal{V}[T]$.*

Démonstration. Les polynômes unitaires irréductibles sont de degré supérieur ou égal à un et π est irréductible dans $\mathcal{V}\{T\}$, car le quotient $\mathcal{V}\{T\}/\pi\mathcal{V}\{T\} = k[T]$ est intègre. \square

Ce qui permet de donner une autre description des points de $\text{Spm } K\{T\}$:

Corollaire (3.3.1.6). *Les points de $\text{Spm } K\{T\}$ sont en bijection avec un système de représentants des éléments irréductibles de $K\{T\}$.*

3.3.2. Spécialisation, (bonne) réduction et Teichmüller dans $\text{Spm } K\{T\}$

Soit $f(T) \in \mathcal{V}[T]$, unitaire et irréductible dans $\mathcal{V}[T]$, qu'on identifiera dans la suite à un point $x \in \text{Spm } K\{T\}$; par le lemme de Hensel [Bour, AC

III, §4, n° 3, théo 1] son image canonique $\bar{f}(T) \in k[T]$ dans $k[T]$ n'a qu'un seul facteur irréductible noté

$$\bar{g}(T) = \sum_{i=0}^{i=r} a_i T^i, \quad a_i \in k, \quad a_r = 1; \quad \bar{f}(T) = \bar{g}(T)^e \text{ pour } e \in \mathbb{N}^*.$$

Au début du §3.1 on a défini

$$\text{Teich}(\bar{g})(T) = \sum_{i=0}^{i=r} b_i T^i$$

appelé relèvement de Teichmüller de \bar{g} ; puisque \bar{g} est irréductible, $\text{Teich}(\bar{g})$ est irréductible, de même que tout relèvement $g \in \mathcal{V}[T]$ de \bar{g} . En vertu de la commutativité du diagramme (3.1.4) on a

$$(3.3.2.1) \quad \text{Teich}_{K\{T\}}(\bar{g}k[T]) = \text{Teich}(\bar{g})K\{T\}.$$

On donne l'interprétation de la spécialisation, de la réduction et du relèvement de Teichmüller en termes de polynômes dans la proposition évidente suivante :

Proposition (3.3.2.2). *Sous les hypothèses et notations 3.3.2 précédentes on a :*

- (i) $\mathfrak{m}_x = fK\{T\}$, $\mathring{\mathfrak{m}}_x = f\mathcal{V}\{T\}$,
 \mathfrak{m}_{R_x} est engendré par la classe de π et g dans R_x pour tout relèvement g de \bar{g} ,
 $\mathfrak{m}_{sp(x)} = \pi\mathcal{V}\{T\} + g\mathcal{V}\{T\} = \pi\mathcal{V}\{T\} + \text{Teich}(\bar{g})\mathcal{V}\{T\}$,
 $\mathfrak{m}_{\overline{sp}(x)} = \bar{g}k[T]$, $\tilde{\mathfrak{m}}_x = \bar{f}k[T]$,
- (ii) $\overline{sp}(f) = \bar{g}$,
- (iii) $\text{réd}(f) = \bar{f}$,
- (iv) $\overline{sp}(f) = \text{réd}(f) = \bar{f}$ (i.e. f a bonne réduction) $\iff \bar{f}$ est irréductible,
- (v) $\text{Teich}_{K\{T\}}(\bar{g}) = \text{Teich}(\bar{g})$,
- (vi) $\overline{sp}(\text{Teich}(\bar{g})) = \text{réd}(\text{Teich}(\bar{g})) = \bar{g}$,
- (vii) $\deg(f) = e \times \deg(\bar{g})$; lorsque $R_x = \mathcal{V}_x$, e est l'indice de ramification de \mathcal{V}_x sur \mathcal{V} et $\deg(\bar{g})$ est le degré résiduel de K_x sur K .

Ce qui, pour les tubes, fournit le théorème :

Théorème (3.3.2.3). *Soit $x_0 \in \text{Max } k[T]$; on note $\mathfrak{m}_{x_0} = \bar{g}(T)k[T]$ l'idéal maximal correspondant où $\bar{g}(T)$ est le générateur unitaire irréductible de \mathfrak{m}_{x_0} . Alors on a :*

- (i) $\text{réd}^{-1}(x_0) = \{f \in \mathcal{V}[T] / f \text{ unitaire tel que } \overline{f} = \overline{g}\}$.
- (ii) $]x_0[:= \overline{sp}^{-1}(\overline{g}) = \{f \in \mathcal{V}[T] / f \text{ unitaire irréductible, } \exists e \in \mathbb{N}, \overline{f} = \overline{g}^e\}$.
- (iii) $]x_0[\backslash \text{réd}^{-1}(x_0) = \{f \in \mathcal{V}[T] / f \text{ unitaire irréductible, } \exists e \in \mathbb{N}^{\geq 2}, \overline{f} = \overline{g}^e\}$.
- (iv) $\text{Teich}(\overline{g}) \in \text{réd}^{-1}(x_0)$.
- (v) $f \in]x_0[\backslash \text{réd}^{-1}(x_0)$ si $\overline{g}(T) = T$, f polynôme d'Eisenstein, $\overline{f} = \overline{g}^e$, $e \geq 2$.

3.4. Exemples

Les exemples que nous allons traiter se rapportent aux points de $\text{Spm } K\{T\}$ pour différents corps K , extensions finies de \mathbb{Q}_p : comme dans le §3.3 nous identifierons les points de $\text{Spm } K\{T\}$ ou $\text{Max } k[T] = \text{Spm } k[T]$ aux polynômes unitaires irréductibles auxquels ils correspondent. Nous utiliserons aussi les notations du §3.2, R_x, \mathcal{V}_x avec pour corps résiduels $k(R_x), k(\mathcal{V}_x)$ et corps des fractions K_x , etc...

Pour illustrer la diversité des situations nous allons exhiber tour à tour des exemples dans lesquels R_x est un anneau de valuation discrète ramifié ou non sur \mathcal{V} , des cas où R_x n'est pas un anneau de valuation discrète avec \mathcal{V}_x ramifié ou non sur \mathcal{V} ou totalement ramifié sur \mathcal{V} , en donnant des points dans $\text{réd}^{-1}(x_0)$ et dans $]x_0[\backslash \text{réd}^{-1}(x_0)$.

3.4.1. 1^{er} cas : R_x anneau de valuation discrète non ramifié sur \mathcal{V}

$$\textcircled{1} \quad R_x = \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3[T]/(T).$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $x_0 = T \in \mathbb{F}_3[T]$, $k(x_0) = \mathbb{F}_3$ et $x = T \in \text{réd}^{-1}(x_0)$.

$$\textcircled{2} \quad R_x = \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}]$.

$R_x = \mathbb{Z}_3[T]/(T^2 - 2)$ est non ramifié de degré deux sur \mathbb{Z}_3 .

$$x_0 = T^2 - 2 \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[T]/(T^2 - 2) = \mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1) = k(R_x).$$

$$x = T^2 - 2 \in \text{réd}^{-1}(x_0), y = T^2 + 1 = \text{Teich}(x_0) \in \text{réd}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension non ramifiée de degré 2 de $K = \mathbb{Q}_3$.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

3.4.2. 2^e cas : R_x anneau de valuation discrète ramifié sur \mathcal{V}

$$\textcircled{1} \quad R_x = \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_2[i].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_2$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_2[i]$.

$R_x = \mathbb{Z}_2[T]/(T^2 + 1) = \mathbb{Z}_2[Y]/((Y - 1)^2 + 1) = \mathbb{Z}_2[Y]/(Y^2 - 2Y + 2)$ est un anneau de valuation discrète totalement ramifié de degré deux sur \mathbb{Z}_2 , car $Y^2 - 2Y + 2$ est un polynôme d'Eisenstein.

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par la classe de $T + 1$.

$x_0 = T + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$.

$k(x_0) = \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[T]/(T + 1) = \mathbb{Z}_2[T]/(T^2 + 1, T + 1) = k(R_x)$.

$x = T^2 + 1 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0)$, $y = T + 1 = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0)$, $z = T + 3 \in \text{red}^{-1}(x_0)$.

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension totalement ramifiée de degré 2 de $K = \mathbb{Q}_2$.

$k(R_x) = \mathbb{F}_2 = k(\mathcal{V}_x)$.

② $R_x = \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur \mathbb{Z}_3 est $P = (T - \sqrt{2} - \sqrt{3})(T - \sqrt{2} + \sqrt{3})(T + \sqrt{2} + \sqrt{3})(T + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = T^4 - 10T^2 + 1 \equiv (T^2 + 1)^2 \pmod{3}$, car on vérifie que chacune des quatre racines de P est primitive, i.e. engendre $\mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ qui est de degré 4 sur \mathbb{Q}_3 , comme extension composée des deux extensions de degré 2 totalement ramifiées $\mathbb{Q}_3[\sqrt{3}]$ et $\mathbb{Q}_3[\sqrt{6}]$ de \mathbb{Q}_3 : faisant par exemple le raisonnement avec $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, on a $1/(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $2\sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$, d'où $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_3[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_3[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$; ainsi P est bien irréductible sur \mathbb{Q}_3 et $\mathbb{Q}_3[\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[T]/(T^4 - 10T^2 + 1)$. De plus $1/(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \in \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ car le coefficient constant de P est inversible dans \mathbb{Z}_3 .

$R_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 10T^2 + 1)$.

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par la classe de $T^2 + 1$.

$x_0 = T^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[T]$.

$k(x_0) = \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 10T^2 + 1, T^2 + 1) = k(R_x)$.

$x = T^4 - 10T^2 + 1 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0)$, $y = T^2 + 1 = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0)$, $z = T^2 + 3T + 1 \in \text{red}^{-1}(x_0)$.

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension ramifiée de degré 4 de $K = \mathbb{Q}_3$, d'indice de ramification 2 et de degré résiduel 2 : remarquons que $K(R_x)$ n'est pas totalement ramifiée sur \mathbb{Q}_3 , bien qu'elle soit extension composée de deux extensions totalement ramifiées sur \mathbb{Q}_3 .

$k(R_x) = \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x)$.

$$\textcircled{3} \ R_x = \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[i, \sqrt{3}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}]$.

Le polynôme minimal de $i + \sqrt{3}$ sur \mathbb{Z}_3 est $P = (T - i - \sqrt{3})(T - i + \sqrt{3})(T + i + \sqrt{3})(T + i - \sqrt{3}) = T^4 - 4T^2 + 16 \equiv (T^2 + 1)^2 \pmod{3}$, car on vérifie que chacune des quatre racines de P est primitive, i.e. engendre $\mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}]$ qui est de degré 4 sur \mathbb{Q}_3 , comme extension composée des deux extensions de degré 2 totalement ramifiées $\mathbb{Q}_3[\sqrt{3}]$ et $\mathbb{Q}_3[\sqrt{-3}]$ de \mathbb{Q}_3 : faisant par exemple le raisonnement avec $i + \sqrt{3}$, on a $4/(i + \sqrt{3}) = -i + \sqrt{3}$, $2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + i) + (\sqrt{3} - i)$, $2i = (i + \sqrt{3}) - (-i + \sqrt{3})$, d'où $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_3[i + \sqrt{3}]$ et $i \in \mathbb{Q}_3[i + \sqrt{3}]$; ainsi P est bien irréductible sur \mathbb{Q}_3 et $\mathbb{Q}_3[i + \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[T]/(T^4 - 4T^2 + 16)$. De plus $1/(i + \sqrt{3}) \in \mathbb{Z}_3[i + \sqrt{3}]$ car le coefficient constant de P est inversible dans \mathbb{Z}_3 .

$$R_x = \mathbb{Z}_3[i + \sqrt{3}] = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 4T^2 + 16).$$

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par la classe de $T^2 + 1$.

$$x_0 = T^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 4T^2 + 16, T^2 + 1) = k(R_x).$$

$$x = T^4 - 4T^2 + 16 \in]x_0[\backslash \text{red}^{-1}(x_0), y = T^2 + 1 = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T^2 + 7 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension ramifiée de degré 4 de $K = \mathbb{Q}_3$, d'indice de ramification 2 et de degré résiduel 2 : remarquons que $K(R_x)$ n'est pas totalement ramifiée sur \mathbb{Q}_3 , bien qu'elle soit extension composée de deux extensions totalement ramifiées sur \mathbb{Q}_3 .

$$k(R_x) = \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

3.4.3. 3^e cas : R_x n'est pas un anneau de valuation discrète

3.4.3.1. \mathcal{V}_x non ramifié sur \mathcal{V}

$$R_x = \mathbb{Z}_3[3\sqrt{2}] \hookrightarrow_{\neq} \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}]$.

$R_x = \mathbb{Z}_3[T]/(T^2 - 18)$: $T^2 - 18$ est bien irréductible sur \mathbb{Z}_3 sinon il aurait une racine dans \mathbb{Q}_3 , à savoir $3\sqrt{2}$ ou $-3\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_3$ ce qui n'est pas.

R_x n'est pas un anneau de valuation discrète car $\sqrt{2} \notin R_x$.

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par 3 et T .

$$x_0 = T \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_3 = \mathbb{F}_3[T]/(T) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^2 - 18, 3, T) = k(R_x).$$

$$x = T^2 - 18 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0), y = T = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T + 3 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension non ramifiée de degré 2 de $K = \mathbb{Q}_3$.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_3 \subset \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

3.4.3.2. \mathcal{V}_x totalement ramifié sur \mathcal{V}

$$R_x = \mathbb{Z}_2[2i] \hookrightarrow_{\neq} \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_2[i].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_2$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_2[i]$.

$R_x = \mathbb{Z}_2[T]/(T^2 + 4) : T^2 + 4$ est bien irréductible sur \mathbb{Z}_2 sinon il aurait une racine dans \mathbb{Q}_2 , à savoir $2i$ ou $-2i$ et donc $i \in \mathbb{Q}_2$ ce qui n'est pas.

R_x n'est pas un anneau de valuation discrète car $i \notin R_x$.

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par 2 et T .

$$x_0 = T \in \mathbb{F}_2[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2[T]/(T) = \mathbb{Z}_2[T]/(T^2 + 4, 2, T) = k(R_x).$$

$$x = T^2 + 4 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0), y = T = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T + 2 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension totalement ramifiée de degré 2 de $K = \mathbb{Q}_2$.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_2 = k(\mathcal{V}_x).$$

Le morphisme $R_x = \mathbb{Z}_2[2i] \hookrightarrow \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_2[i]$ est ramifié [SGA 1, I, §7, cor 7.5].

3.4.3.3. \mathcal{V}_x ramifié non totalement sur \mathcal{V}

$$\textcircled{1} R_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}, 3\sqrt{3}] \hookrightarrow_{\neq} \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Le polynôme minimal de $\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ sur \mathbb{Z}_3 est $P = (T - \sqrt{2} - 3\sqrt{3})(T - \sqrt{2} + 3\sqrt{3})(T + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})(T + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = T^4 - 58T^2 + 625 \equiv (T^2 + 1)^2 \pmod{3}$, car on vérifie que chacune des quatre racines de P est primitive, i.e. engendre $\mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ qui est de degré 4 sur \mathbb{Q}_3 : faisant par exemple le raisonnement avec $\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$, on a $1/(3\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})/25$, d'où $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}]$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}]$; ainsi P est bien irréductible sur \mathbb{Q}_3 et $\mathbb{Q}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[T]/(T^4 - 58T^2 + 625)$. De plus $1/(\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \in \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ car le

coefficient constant de P est inversible dans \mathbb{Z}_3 ; et donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}]$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}]$.

$$R_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}] = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 58T^2 + 625).$$

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par 3 et $T^2 + 1$.

$$x_0 = T^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 58T^2 + 625, 3, T^2 + 1) = k(R_x).$$

$$x = T^4 - 58T^2 + 625 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0), y = T^2 + 1 = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T^2 + 3T + 4 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension ramifiée de degré 4 de $K = \mathbb{Q}_3$, d'indice de ramification 2 et de degré résiduel 2.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

Le morphisme $R_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2} + 3\sqrt{3}] \hookrightarrow \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ est ramifié [SGA 1, I, §7, cor 7.5].

$$\textcircled{2} R_x = \mathbb{Z}_3[3\sqrt{2} + \sqrt{3}] \xhookrightarrow{\neq} \mathbb{Z}_3[3\sqrt{2}, \sqrt{3}] \xhookrightarrow{\neq} \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Le polynôme minimal de $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur \mathbb{Z}_3 est $P = (T - 3\sqrt{2} - \sqrt{3})(T - 3\sqrt{2} + \sqrt{3})(T + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})(T + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = T^4 - 42T^2 + 225 \equiv T^4 \pmod{3}$, car on vérifie que chacune des racines de P engendrent l'extension $\mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ de degré 4 sur \mathbb{Q}_3 ; ainsi P est bien irréductible sur \mathbb{Q}_3 et $\mathbb{Q}_3[3\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[T]/(T^4 - 42T^2 + 225)$.

$$R_x = \mathbb{Z}_3[3\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 42T^2 + 225).$$

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par 3 et T .

$$x_0 = T \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_3 = \mathbb{F}_3[T]/(T) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 42T^2 + 225, 3, T) = k(R_x).$$

$$x = T^4 - 42T^2 + 225 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0), y = T = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T + 3 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension ramifiée de degré 4 de $K = \mathbb{Q}_3$, d'indice de ramification 2 et de degré résiduel 2.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_3 \subset \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

$$\textcircled{3} R_x = \mathbb{Z}_3[i, 3\sqrt{3}] \xhookrightarrow{\neq} \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[i, \sqrt{3}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}]$.

Le polynôme minimal de $i + 3\sqrt{3}$ sur \mathbb{Z}_3 est $P = (T - i - 3\sqrt{3})(T - i + 3\sqrt{3})(T + i + 3\sqrt{3})(T + i - 3\sqrt{3}) = T^4 - 52T^2 + 784 \equiv (T^2 + 1)^2 \pmod{3}$, car on vérifie que chacune des racines de P engendre l'extension $\mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}]$ de degré 4 sur \mathbb{Q}_3 ; ainsi P est bien irréductible sur \mathbb{Q}_3 et $\mathbb{Q}_3[i + 3\sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[T]/(T^4 - 52T^2 + 784)$. De plus $1/(i + 3\sqrt{3}) = (3\sqrt{3} - i)/29 \in \mathbb{Z}_3[i + 3\sqrt{3}]$ car le coefficient constant de P est inversible dans \mathbb{Z}_3 ; et donc $i \in \mathbb{Z}_3[i + 3\sqrt{3}]$ et $3\sqrt{3} \in \mathbb{Z}_3[i + 3\sqrt{3}]$.

$$R_x = \mathbb{Z}_3[i + 3\sqrt{3}] = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 52T^2 + 784).$$

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par 3 et $T^2 + 1$.

$$x_0 = T^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 - 52T^2 + 784, 3, T^2 + 1) = k(R_x).$$

$$x = T^4 - 52T^2 + 784 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0), y = T^2 + 1 = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T^2 + 4 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension ramifiée de degré 4 de $K = \mathbb{Q}_3$, d'indice de ramification 2 et de degré résiduel 2.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

Le morphisme $R_x = \mathbb{Z}_3[i + 3\sqrt{3}] \hookrightarrow \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[i, \sqrt{3}]$ est ramifié [SGA 1, I, §7, cor 7.5].

$$\textcircled{4} R_x = \mathbb{Z}_3[3i + \sqrt{3}] \xrightarrow{\neq} \mathbb{Z}_3[3i, \sqrt{3}] \xrightarrow{\neq} \mathcal{V}_x = \mathbb{Z}_3[i, \sqrt{3}].$$

Ici $K = \mathbb{Q}_3$, $K(R_x) = K(\mathcal{V}_x) = \mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}]$.

Le polynôme minimal de $3i + \sqrt{3}$ sur \mathbb{Z}_3 est $P = (T - 3i - \sqrt{3})(T - 3i + \sqrt{3})(T + 3i + \sqrt{3})(T + 3i - \sqrt{3}) = T^4 + 12T^2 + 144 \equiv T^4 \pmod{3}$, car on vérifie que chacune des racines de P engendre l'extension $\mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}]$ de degré 4 sur \mathbb{Q}_3 ; ainsi P est bien irréductible sur \mathbb{Q}_3 et $\mathbb{Q}_3[3i + \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[i, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}_3[T]/(T^4 + 12T^2 + 144)$.

$$R_x = \mathbb{Z}_3[3i + \sqrt{3}] = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 + 12T^2 + 144).$$

\mathfrak{m}_{R_x} est engendré par 3 et T .

$$x_0 = T \in \mathbb{F}_3[T].$$

$$k(x_0) = \mathbb{F}_3 = \mathbb{F}_3[T]/(T) = \mathbb{Z}_3[T]/(T^4 + 12T^2 + 144, 3, T) = k(R_x).$$

$$x = T^4 + 12T^2 + 144 \in]x_0[\setminus \text{red}^{-1}(x_0), y = T = \text{Teich}(x_0) \in \text{red}^{-1}(x_0), z = T + 3 \in \text{red}^{-1}(x_0).$$

$K(R_x) = K(\mathcal{V}_x)$ est une extension ramifiée de degré 4 de $K = \mathbb{Q}_3$, d'indice de ramification 2 et de degré résiduel 2.

$$k(R_x) = \mathbb{F}_3 \subset \mathbb{F}_9 = k(\mathcal{V}_x).$$

4. Images directes de F -isocristaux convergents

4.0.

On reprend les hypothèses de 3.0.

4.1. Convergence des images directes

4.1.1.

On suppose de plus en 4.1 que K contient les racines $q^{ièmes}$ de l'unité. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux \mathcal{V} -schémas formels lisses ; on considère un diagramme commutatif

$$(4.1.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{i_X} & \mathcal{X} \\ & \nearrow \varphi_X & \vdots f & & \nearrow \varphi_X \\ X' & \xrightarrow{i_{X'}} & \mathcal{X}' & & \\ \downarrow f' & & \downarrow h' & & \downarrow h \\ & \nearrow \varphi_S & \vdots i_S & & \nearrow \varphi_S \\ S' & \xrightarrow{i_{S'}} & S & \xrightarrow{\rho} & Spf \mathcal{V} \\ & & \downarrow \rho' & & \nearrow \theta \\ & & S' & \xrightarrow{\rho'} & Spf \mathcal{V} \end{array}$$

dans lequel $f, f', \varphi_S, \varphi_X$ sont des morphismes de k -schémas lisses, $h, h', \rho, \rho', \varphi_S, \varphi_X$ sont des morphismes de \mathcal{V} -schémas formels séparés lisses, h, h' sont propres et lisses, les i sont des immersions fermées et les carrés verticaux sont cartésiens.

Théorème (4.1.2). *Supposons le corps k parfait. Soient S un k -schéma lisse, \mathcal{S} un \mathcal{V} -schéma formel lisse relevant S et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme propre et lisse relevant en un morphisme propre et lisse $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ de \mathcal{V} -schémas formels. Alors*

(4.1.2.1) *Pour tout entier $i \geq 0$, f induit un foncteur*

$$R^i f_{conv*} : F^a\text{-Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K) .$$

(4.1.2.2) *Le foncteur précédent est compatible au passage à la fibre en un point*

fermé $s_0 = \text{Spec } k(s_0)$ de S , c'est-à-dire : pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_{s_0} & \xrightarrow{i_{X_{s_0}}} & X \\ f_{s_0} \downarrow & & \downarrow f \\ s_0 & \xrightarrow{i_{s_0}} & S \end{array}$$

et tout $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$ on a un isomorphisme de changement de base

$$i_{s_0}^* R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{s_0, \text{conv}*}(i_{X_{s_0}}^*(\mathcal{E})) = H_{\text{rig}}^i(X_{s_0}/K(s_0), \mathcal{E}_{X_{s_0}})$$

compatible aux Frobenius, dans lequel le corps $K(s_0)$ a été introduit au début de 3.1 et $\mathcal{E}_{X_{s_0}} := i_{X_{s_0}}^*(\mathcal{E})$.

(4.1.2.3) Sous les hypothèses 4.1.1 le foncteur $R^i f_{\text{conv}*}$ de 4.1.2.1 commute au changement de base $\varphi_S : S' \rightarrow S$, i.e. pour $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$, $\mathcal{E}' = \varphi_X^*(\mathcal{E}) \in F^a\text{-Isoc}(X'/K)$, on a un diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} F_{S'}^* R^i f'_{\text{rig}*}(X'/S'; \mathcal{E}') & \xrightarrow{\phi'^i} & R^i f'_{\text{rig}*}(X'/S'; \mathcal{E}') \\ \uparrow \varphi_S^* & & \uparrow \varphi_S^* \\ F_S^* R^i f_{\text{rig}*}(X/S; \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi^i} & R^i f_{\text{rig}*}(X/S; \mathcal{E}) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les isomorphismes de changement de base et les flèches horizontales les isomorphismes de Frobenius.

Démonstration.

Pour (4.1.2.1). Puisque l'on dispose d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & \mathcal{X} \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ S & \xrightarrow{i_S} & \mathcal{S} \end{array}$$

satisfaisant aux conditions de [Et 6, (3.4.4.3)], on en déduit que pour $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$, on a [loc. cit.]

$$\mathcal{E}_i := R^i f_{\text{rig}*}(X/S; \mathcal{E}) \in \text{Isoc}(S/K) .$$

En notant $F_S : S \rightarrow S$ (resp $F_X : X \rightarrow X$) le Frobenius de S (resp de X) (élévation à puissance q) et

$$\phi_{\mathcal{E}} : F_X^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$$

l'isomorphisme de Frobenius de \mathcal{E} , il reste à construire un isomorphisme de Frobenius

$$\phi_i = \phi_{\mathcal{E}_i} : F_S^*(\mathcal{E}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_i .$$

Quitte à décomposer S en somme de ses composantes connexes il suffit de définir $\phi_{\mathcal{E}_i}$ sur chacune de ces composantes connexes. Soit S_α un ouvert affine d'une composante connexe S_0 de S : comme le foncteur naturel

$$F^a\text{-}Isoc(S_0/K) \longrightarrow F^a\text{-}Isoc(S_\alpha/K)$$

est pleinement fidèle [Et 3, théo 4] il suffit de définir $\phi_{\mathcal{E}_i}$ sur S_α .

On part donc d'une décomposition [cor (2.1.3)] $\mathcal{S} = \bigcup_\alpha \mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\alpha = \text{Spf } \hat{A}_\alpha$ où les A_α sont des \mathcal{V} -algèbres lisses et intègres, $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$, $S_\alpha = \text{Spec } A_{\alpha,0}$, où $A_{\alpha,0} := A_\alpha/\pi A_\alpha$ et on note $j_{S_\alpha} : S_\alpha \hookrightarrow S$ l'immersion ouverte. Choisissons comme en (3.1) un relèvement (fini et plat) $F_{\mathcal{S}_\alpha} : \mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ du Frobenius $F_{S_\alpha} : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$, au-dessus de $\sigma : \text{Spf } \mathcal{V} \rightarrow \text{Spf } \mathcal{V}$. Puisque le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{i_X} & \mathcal{X} \\ & \nearrow j_{X_\alpha} & \vdots f & \nearrow j_{\mathcal{X}_\alpha} & \downarrow h \\ X_\alpha & \xrightarrow{i_{X_\alpha}} & \mathcal{X}_\alpha & & \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow h_\alpha & & \\ S_\alpha & \xrightarrow{i_{S_\alpha}} & \mathcal{S}_\alpha & & \end{array}$$

(The diagram is a commutative square with additional arrows. The top row is $X \xrightarrow{i_X} \mathcal{X}$. The bottom row is $S_\alpha \xrightarrow{i_{S_\alpha}} \mathcal{S}_\alpha$. The left vertical arrow is $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow S_\alpha$. The right vertical arrow is $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$. The middle horizontal arrow is $i_{X_\alpha} : X_\alpha \rightarrow \mathcal{X}_\alpha$. The bottom horizontal arrow is $i_{S_\alpha} : S_\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$. There are also diagonal arrows $j_{X_\alpha} : X_\alpha \rightarrow X$, $j_{\mathcal{X}_\alpha} : \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathcal{X}$, $j_{S_\alpha} : S_\alpha \rightarrow \mathcal{S}$, and $j_{\mathcal{S}_\alpha} : \mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}$. A vertical dotted arrow f goes from X to S , and a horizontal dotted arrow i_S goes from S to \mathcal{S} . The square $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ is also commutative with arrows $i_{X_\alpha}, i_{S_\alpha}, f_\alpha, h_\alpha$.)

fournit un isomorphisme de changement de base [Et 6, théo (3.4.4)]

$$j_{S_\alpha}^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{S}; \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha, rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; j_{X_\alpha}^*(\mathcal{E})) ,$$

on est ramené à construire un isomorphisme de Frobenius sur

$$\mathcal{E}_\alpha^i := R^i f_{\alpha, rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; j_{X_\alpha}^*(\mathcal{E})) \in Isoc(S_\alpha/K)$$

où $\mathcal{E}_\alpha := j_{X_\alpha}^*(\mathcal{E})$ est muni de l'isomorphisme de Frobenius

$$\phi_{\mathcal{E}_\alpha} = j_{X_\alpha}^*(\phi_{\mathcal{E}}) : F_{X_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha .$$

Notons

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha^{(q)} & \xrightarrow{i_{X_\alpha^{(q)}}} & \mathcal{X}_\alpha^{(q)} \\ f_\alpha^{(q)} \downarrow & & \downarrow h_\alpha^{(q)} \\ S_\alpha & \xrightarrow{i_{S_\alpha}} & \mathcal{S}_\alpha \end{array}$$

l'image inverse du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{i_{X_\alpha}} & \mathcal{X}_\alpha \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow h_\alpha \\ S_\alpha & \xrightarrow{i_{S_\alpha}} & \mathcal{S}_\alpha \end{array}$$

par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} S_\alpha & \xrightarrow{i_{S_\alpha}} & \mathcal{X}_\alpha \\ F_{S_\alpha} \downarrow & & \downarrow F_{S_\alpha} \\ S_\alpha & \xrightarrow{i_{S_\alpha}} & \mathcal{S}_\alpha \end{array} ,$$

et considérons la factorisation usuelle du Frobenius F_{X_α} (avec $F_{X_\alpha}^*(x) = x^q$)

(4.1.2.4)

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{F_{X_\alpha}} & X_\alpha \\ \text{\scriptsize F_{X_α/S_α}} \swarrow & & \searrow \text{\scriptsize F_{X_α/S_α}} \\ X_\alpha^{(q)\pi_{X_\alpha/S_\alpha}} & \xrightarrow{\quad} & X_\alpha \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f_\alpha \\ S_\alpha & \xrightarrow{F_{S_\alpha}} & S_\alpha \end{array}$$

où le carré est cartésien.

On dispose d'un isomorphisme de changement de base [Et 6, (3.4.4.1)(ii)]

$$(4.1.2.5) \quad F_{S_\alpha}^* R^i f_{\alpha,rig^*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha,rig^*}(X_\alpha^{(q)}/\mathcal{S}_\alpha; \pi_{X_\alpha/S_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha)),$$

d'un morphisme fonctoriel [C-T, 10.5.2]

$$(4.1.2.6) \quad \eta^i : R^i f_{\alpha,rig^*}(X_\alpha^{(q)}/\mathcal{S}_\alpha; \pi_{X_\alpha/S_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha)) \longrightarrow R^i f_{\alpha,rig^*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; F_{X_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha))$$

induit par l'identité de S_α et F_{X_α/S_α} ,

et de l'isomorphisme

(4.1.2.7)

$$R^i f_{\alpha,rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; \phi_{\mathcal{E}_\alpha}) : R^i f_{\alpha,rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; F_{X_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha)) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha,rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha)$$

induit par

$$\phi_{\mathcal{E}_\alpha} = j_{X_\alpha}^*(\phi_{\mathcal{E}}) : F_{X_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha .$$

Par composition de ces trois morphismes on obtient le morphisme de Frobenius de $\mathcal{E}_\alpha^i := R^i f_{\alpha,rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha)$

$$(4.1.2.8) \quad \phi^i : F_{\mathcal{S}_\alpha}^* R^i f_{\alpha,rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha) \longrightarrow R^i f_{\alpha,rig*}(X_\alpha/\mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha) ,$$

et il s'agit de prouver que ϕ^i est un isomorphisme : pour ça il suffit de prouver que c'est le cas pour η^i . On sait déjà que η^i est un morphisme d'isocristaux convergents : comme la source et le but de η^i sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_{\alpha K}}$ -modules cohérents [Et 6, (3.4.4.3)] il suffit, pour montrer que η^i est un isomorphisme, de montrer que c'est un isomorphisme fibre à fibre aux points fermés de $\mathcal{S}_{\alpha K} = Spm(\hat{A}_{\alpha K})$ [B-G-R, 9.4.2 cor 7].

Soit $s \in Spm(\hat{A}_{\alpha K})$ un point fermé de $\mathcal{S}_{\alpha K}$, correspondant à un idéal maximal \mathfrak{m}_s de $\hat{A}_K := \hat{A}_{\alpha K}$; on utilise alors les notations de (3.2), en particulier on pose $s_0 = \overline{sp}(s)$:

$$(4.1.2.9) \quad \begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\tilde{\psi}_s} & k(R_s) = R_s/\mathfrak{m}_{R_s} = A_0/\mathfrak{m}_{\overline{sp}(s)} = \hat{A}/\mathfrak{m}_{sp(s)} \\ \parallel & & \uparrow \\ A_0 & \xrightarrow{\bar{\psi}_s} & R_s/\pi R_s = A_0/\tilde{\mathfrak{m}}_s = \hat{A}/\langle \pi, \mathring{\mathfrak{m}}_s \rangle \\ \uparrow \rho & & \uparrow \\ \hat{A} & \xrightarrow{\psi_s} & R_s = \hat{A}/\mathring{\mathfrak{m}}_s \\ \downarrow j & & \downarrow j_s \\ \hat{A}_K & \xrightarrow{\theta_s} & K_s = \hat{A}_K/\mathfrak{m}_s . \end{array}$$

Notons

$$\mathcal{Y}_s = Spf R_s, \quad \mathcal{Y}_{K_s} = Spm K_s, \quad Y_{s_0} = Spec k(R_s) ,$$

$$\theta_s^\# : \mathcal{Y}_{K_s} = Spm K_s \longrightarrow Spm \hat{A}_K = \mathcal{S}_{\alpha K} ,$$

$$\psi_s^\# : \mathcal{Y}_s = Spf R_s \longrightarrow Spf \hat{A} = \mathcal{S}_\alpha ,$$

$$i_{s_0} := \tilde{\psi}_s^\# : Y_{s_0} = Spec k(R_s) = Spec k(s_0) \rightarrow Spec A_0 = \mathcal{S}_\alpha .$$

Soit $\mathcal{F} \in \text{Isoc}(S_\alpha/K)$ un isocrystal convergent dont une réalisation [B3, (2.3.2)] est un $\mathcal{O}_{S_{\alpha K}}$ -module cohérent \mathcal{F}_K à connexion intégrable convergente : une réalisation de $i_{s_0}^*(\mathcal{F})$, la fibre de \mathcal{F} en s_0 , est donnée par $(\theta_s^\#)^*(\mathcal{F}_K)$ [B3, (2.3.2)(iv)] en prenant l'image inverse de \mathcal{F}_K par le diagramme

$$(4.1.2.10) \quad \begin{array}{ccc} S_\alpha & \hookrightarrow & \mathcal{S}_\alpha \\ \tilde{\psi}_s^\# \uparrow & & \uparrow \psi_s^\# \\ Y_{s_0} & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_s \end{array},$$

et cette image inverse ne dépend, à isomorphisme canonique près, que de $\tilde{\psi}_s^\#$, qui lui-même ne dépend que de la spécialisation $s_0 = \overline{sp}(s)$ de s . En fait, la connexion dont est muni \mathcal{F}_K fournit un système compatible d'isomorphismes canoniques

$$s_1^*(\mathcal{F}_K) \xrightarrow{\sim} s_2^*(\mathcal{F}_K)$$

pour tous points $s_1, s_2 \in \text{Spm } \hat{A}_K$ ayant même spécialisation s_0 , i.e. pour des points $s_i \in]s_0[= \overline{sp}^{-1}(s_0)$, $i = 1, 2$ [B3; (2.2.17), (2.3.2)(iv)]. L'image inverse $(\theta_s^\#)^*(\mathcal{F}_K)$ est canoniquement isomorphe à celle obtenue en remplaçant \mathcal{Y}_s par un \mathcal{V} -schéma formel fini étale $\mathcal{Y}_{s'}$ et $\psi_s^\#$ par $\psi_{s'}^\#$ tels que le diagramme suivant

$$(4.1.2.11) \quad \begin{array}{ccc} S_\alpha & \hookrightarrow & \mathcal{S}_\alpha \\ i_{s_0} \uparrow & & \uparrow \psi_{s'}^\# \\ Y_{s_0} & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_{s'} \end{array}$$

soit cartésien. En fait on choisit $s' = \text{Teich}_{\hat{A}_K}(s_0)$, donc $\psi_{s'}^\#$ est le relèvement de Teichmüller de s_0

$$\tau_{\hat{A}}^\#(s_0) : \mathcal{Y}_{s'} = \text{Spf } \mathcal{V}(s_0) \rightarrow \mathcal{Y}_\alpha = \text{Spf } \hat{A}$$

dont la commutation au Frobenius [(3.1.11)] va nous être fort utile : $\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)$ est une réalisation de $i_{s_0}^*$ [B3; (2.3.6) et (2.3.2)(iv)], [LS, chap 7] qui commute aux Frobenius. Ainsi, grâce à [B3, (2.1.10), (2.2.3), (2.2.10), (2.3.2)] on a démontré la proposition suivante :

Proposition (4.1.2.12). *Avec les notations précédentes, soit \mathcal{F} (resp \mathcal{G}) $\in \text{Isoc}(S_\alpha/K)$ un isocrystal convergent dont une réalisation est un $\mathcal{O}_{S_{\alpha K}}$ -module cohérent \mathcal{F}_K (resp \mathcal{G}_K) à connexion intégrable convergente et $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de $\text{Isoc}(S_\alpha/K)$ dont une réalisation est un morphisme $\psi_K : \mathcal{F}_K \rightarrow \mathcal{G}_K$.*

- (i) Pour tout point fermé s_0 de S_α , une réalisation de la fibre $i_{s_0}^*(\mathcal{F}) =: \mathcal{F}_{s_0}$ de \mathcal{F} en s_0 est donnée par la fibre $(\theta_s^\#)^*(\mathcal{F}_K) =: \mathcal{F}_{K,s}$ de \mathcal{F}_K en un point quelconque $s \in]s_0[$. La connexion dont est muni \mathcal{F}_K fournit un système compatible d'isomorphismes canoniques

$$s_1^*(\mathcal{F}_K) \xrightarrow{\sim} s_2^*(\mathcal{F}_K)$$

pour tous points $s_1, s_2 \in \text{Spm } \hat{A}_K$ ayant même spécialisation s_0 , i.e. pour des points $s_i \in]s_0[= \overline{sp}^{-1}(s_0)$, $i = 1, 2$.

- (ii) Pour tout point fermé s_0 de S_α , $\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)$ est une réalisation de $i_{s_0}^*$, appelée réalisation de Teichmüller de $i_{s_0}^*$, qui commute aux Frobenius, i.e. $\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0) \circ F_{\hat{A}_K}^* = \sigma_{K(s_0)}^* \circ \tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)$; donc parmi les réalisations du (i) figure $\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)(\mathcal{F}_K)$, appelée réalisation de Teichmüller de $i_{s_0}^*(\mathcal{F})$. Si de plus $\mathcal{F} \in F^a\text{-Isoc}(S_\alpha/K)$ a pour Frobenius $\phi_K : F_{\hat{A}_K}^*(\mathcal{F}_K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_K$, alors \mathcal{F}_{s_0} a pour Frobenius $\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)(\phi_{\mathcal{F}_K}) = \phi_{\mathcal{F}_{K,s_0}} : \sigma_{K(s_0)}^*(\mathcal{F}_{s_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{s_0}$.
- (iii) Pour vérifier que ψ est un monomorphisme (resp un épimorphisme, resp un isomorphisme) il suffit de le vérifier aux points fermés de S_α ; en particulier il suffit de vérifier que la fibre de ψ_K aux points de Teichmüller en est un, i.e. il suffit de vérifier que $\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)(\psi_K)$ en est un pour tout point fermé s_0 de S_α .

On considère le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(4.1.2.13) \quad \begin{array}{ccccc} X_{s_0}^{(q)} & \longrightarrow & X_{s_0} & \longrightarrow & X_\alpha \\ f_{s_0}^{(q)} \downarrow & & \downarrow f_{s_0} & & \downarrow f_\alpha \\ Y & \xrightarrow{\sigma_{k(s_0)}^\#} & Y & \xrightarrow{i_{s_0}} & S_\alpha \end{array} \quad ;$$

$\mathcal{E}_\alpha = j_{X_\alpha}^*(\mathcal{E}) \in \text{Isoc}(X_\alpha/K)$ a pour images inverses $\mathcal{E}_{X_{s_0}}$ et $\mathcal{E}_{X_{s_0}^{(q)}}$ sur X_{s_0} et $X_{s_0}^{(q)}$ respectivement. Il s'agit de démontrer que l'image inverse

$$i_{s_0}^*(\eta^i) = \tau_{\hat{A}_K}^*(s_0)(\eta^i) = \eta_{s_0}^i$$

de η^i est un isomorphisme; or cette image inverse s'insère dans le diagramme

commutatif

(4.1.2.14)

$$\begin{array}{ccc}
\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0) R^i f_{\alpha, rig}^*(X_\alpha^{(q)} / \mathcal{S}_\alpha; \pi_{X_\alpha / \mathcal{S}_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha)) & \xrightarrow{\eta_{s_0}^i} & \tau_{\hat{A}_K}^*(s_0) R^i f_{\alpha, rig}^*(X_\alpha / \mathcal{S}_\alpha; F_{X_\alpha}^*(\mathcal{E}_\alpha)) \\
\uparrow [Et6, (3.4.4)] \simeq & & \downarrow [Et6, (3.4.4)] \simeq \\
\tau_{\hat{A}_K}^*(s_0) F_{\mathcal{S}_\alpha}^* R^i f_{\alpha, rig}^*(X_\alpha / \mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha) & & R^i f_{s_0, rig}^*(X_{s_0} / K(s_0); F_{X_{s_0}}^*(\mathcal{E}_{X_{s_0}})) \\
\uparrow [(3.1.11)'] \simeq & & \downarrow \\
\sigma_{K(s_0)}^* \tau_{\hat{A}_K}^*(s_0) R^i f_{\alpha, rig}^*(X_\alpha / \mathcal{S}_\alpha; \mathcal{E}_\alpha) & & R^i f_{s_0, rig}^*(X_{s_0} / K(s_0); F_{X_{s_0}}^*(\mathcal{E}_{X_{s_0}})) \\
\downarrow [Et6, (3.4.4)] \simeq & & \parallel \\
\sigma_{K(s_0)}^* R^i f_{s_0, rig}^*(X_{s_0} / K(s_0); \mathcal{E}_{X_{s_0}}) & & \\
\downarrow [Et6, (3.4.4)] \simeq & & \\
R^i f_{s_0, rig}^*(X_{s_0}^{(q)} / K(s_0); \mathcal{E}_{X_{s_0}^{(q)}}) & \xrightarrow{F_{X_{s_0}/k(s_0)}^*} & H_{rig, c}^i(X_{s_0} / K(s_0); F_{X_{s_0}}^*(\mathcal{E}_{X_{s_0}})) \\
\parallel & & \\
H_{rig, c}^i(X_{s_0}^{(q)} / K(s_0); \mathcal{E}_{X_{s_0}^{(q)}}) & & .
\end{array}$$

Ainsi $\eta_{s_0}^i$ s'identifie à

(4.1.2.15)

$$F_{X_{s_0}/k(s_0)}^* : H_{rig, c}^i(X_{s_0}^{(q)} / K(s_0); \mathcal{E}_{X_{s_0}^{(q)}}) \rightarrow H_{rig, c}^i(X_{s_0} / K(s_0); F_{X_{s_0}}^*(\mathcal{E}_{X_{s_0}})) ,$$

et ce morphisme est un isomorphisme d'après la proposition (4.1.2.16) ci-dessous, ce qui achèvera la preuve de (4.1.2.1).

La preuve de (4.1.2.2) a été donnée ci-dessus par la même occasion.

Pour (4.1.2.3), on se ramène, comme pour la preuve de (4.1.2.1), au cas où $\mathcal{S} = Spf \hat{A}_\alpha$ et $\mathcal{S}' = Spf \hat{A}'_\alpha$ et la fonctorialité des constructions nous assure de la commutativité du diagramme de (4.1.2.3). \square

On a la généralisation suivante de [E-LS 1, 2.1] :

Proposition (4.1.2.16). *Supposons le corps k parfait. Soient X un k -schéma séparé de type fini, F_X l'itéré a -ième du Frobenius absolu de X ($F_X^*(x) = x^q$), $F_X = \pi_{X/k} \circ F_{X/k}$ sa factorisation*

$$X \xrightarrow{F_{X/k}} X' \xrightarrow{\pi_{X/k}} X$$

et $\sigma : K \rightarrow K' = K$ le relèvement choisi de la puissance $q = p^a$ de k . Pour $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$, on a :

- (i) Pour tout entier $i \geq 0$, $F_{X/k}$ induit une bijection K -linéaire

$$F_{X/k}^* : H_{\text{rig},c}^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E)) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X/K, F_X^*(E)).$$

Si de plus X est lisse sur k , la même assertion vaut pour la cohomologie rigide sans supports compacts.

- (ii) Pour tout entier $i \geq 0$, F_X induit une bijection σ -linéaire

$$F_X^* : H_{\text{rig},c}^i(X/K, E) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X/K, F_X^*(E))$$

c'est-à-dire un isomorphisme

$$\sigma^*(H_{\text{rig},c}^i(X/K, E)) \xrightarrow{\sim} H_{\text{rig},c}^i(X/K, F_X^*(E)).$$

Si de plus X est lisse sur k , la même assertion vaut pour la cohomologie rigide sans supports compacts.

Démonstration de (4.1.2.16). La preuve suit celle de [E-LS 1, 2.1].

Pour (i). On notera $H^i(X/K, E)$ la cohomologie rigide avec ou sans supports compacts. En utilisant la suite exacte longue de localisation en cohomologie rigide à supports compacts (resp. la suite spectrale de localisation lorsque X est lisse sur k) on se ramène au cas où X est un sous-schéma de \mathbb{P}_k^n qui ne rencontre pas les hyperplans de coordonnées; comme la cohomologie rigide commute aux extensions finies de K on peut supposer que K contient les racines q -ièmes de l'unité. On note $F_{\mathbb{P}}$ l'endomorphisme σ -linéaire de $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n$ défini par $F_{\mathbb{P}}^*(T_i) = T_i^q$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$; on a la factorisation usuelle de $F_{\mathbb{P}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n & \xrightarrow{F_{\mathbb{P}}} & \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n \\ \text{\scriptsize } F = F_{\mathbb{P}/\mathcal{V}} \swarrow & & \searrow \text{\scriptsize } \pi_{\mathbb{P}/\mathcal{V}} \\ \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{n(\sigma)} & \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}/\mathcal{V}}} & \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^n \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ \text{Spec}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Spec}(\mathcal{V}) \end{array}$$

où le carré est cartésien : puisque k est parfait, σ est un isomorphisme, de même que $\pi_{\mathbb{P}/\mathcal{V}}$. En dehors des hyperplans de coordonnées, le morphisme

$$F_K = (F_{\mathbb{P}/\mathcal{V}})_K : \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^{n(\sigma)}$$

est un revêtement étale galoisien de groupe $\mu_q^n \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$. Or, si V désigne un voisinage strict quasi-Stein suffisamment petit du tube de X' , alors F_K

induit un revêtement étale galoisien encore noté $F_K : W \rightarrow V$ de groupe $\mu_q^n \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n$. On peut supposer de plus que $E' = \pi_{X/k}^*(E)$ provient d'un module à connexion \mathcal{M} sur V : tout F -automorphisme ψ de \mathbb{P}_V^n induit un automorphisme ψ^* de $F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet$ et l'endomorphisme $F_*(\sum \psi^*)$ de $F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$ se factorise de manière unique par le morphisme de complexes

$$F_K^* : \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet \rightarrow F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$$

pour donner l'application trace

$$Tr : F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet \rightarrow \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$$

(cf [E-LS 1, 2.1] et [Mi, V, lemma 1.12]). Cette application induit des homomorphismes

$$tr : H^i(W, j_W^\dagger F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet) \rightarrow H^i(V, j_V^\dagger \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet)$$

$$\text{et } tr : H_{|X|}^i(W, F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet) \rightarrow H_{|X|}^i(V, \mathcal{M} \otimes \Omega^\bullet).$$

Rappelons ici la définition de j_W^\dagger . Pour un voisinage strict W (resp. un couple de voisinages stricts $W' \subset W$) du tube de X dans $\mathbb{P}_K^{n, an}$ on note α_W (resp. $\alpha_{WW'}$) l'immersion ouverte de W dans $\mathbb{P}_K^{n, an}$ (resp. de W' dans W). Si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux sur W et \mathcal{N} un \mathcal{A} -module, on pose [B 3, (2.1.1.1)], [LS, chap 5] :

$$j_W^\dagger \mathcal{N} := \varinjlim_{W' \subset W} \alpha_{WW'}^* \alpha_{WW'}^* \mathcal{N},$$

la limite étant prise sur les voisinages $W' \subset W$.

Puisque F prolonge $F_{X/k}$, l'application

$$F_{X/k}^* : H^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E)) \rightarrow H^i(X/K, F_X^*(E))$$

est induite par le morphisme de complexes F_K^* , et comme $Tr \circ F_K^* = q^n$ sur $\mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$, on en déduit que $tr \circ F_{X/k}^* = q^n$ sur $H^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E))$: remarquons que pour pouvoir calculer les groupes de cohomologie rigide de X sans supports à l'aide de complexes de de Rham comme ci-dessus on a été amené à supposer X lisse dans l'énoncé de (4.1.2.16) ; l'énoncé de [E-LS 1, 2.1], pour être complet, doit lui-aussi comporter l'hypothèse de lissité de X dans le cas de la cohomologie rigide sans supports.

Par définition on a $F_K^* \circ Tr = F_{K*}(\sum \psi^*)$ sur $F_{K*} F_K^* \mathcal{M} \otimes \Omega_V^\bullet$. D'autre part, si l'on note ψ_0 la réduction mod π d'un F -automorphisme ψ de \mathbb{P}_V^n ,

alors, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\lambda_i \in k$, ψ_0 vérifie

$$\psi_0^*(\lambda_i^q t_i^q) = \psi_0^* F_{X/k}^*(\lambda_i \otimes t_i) = F_{X/k}^*(\lambda_i \otimes t_i) = F_{X/k}^*(1 \otimes \lambda_i^q t_i) = \lambda_i^q t_i^q;$$

puisque k est parfait on en déduit que ψ_0 est l'identité de X . Ainsi on voit que

$$F_{X/k}^* \circ tr = \sum Id^* = q^n$$

sur $H^i(X/K, F_X^*(E))$. On a donc montré que $(1/q^n)tr$ est un inverse pour $F_{X/k}^*$.

Pour (ii). Le morphisme du (ii) est le composé

$$\sigma^*(H^i(X/K, E)) \xrightarrow{u} H^i(X'/K', \pi_{X/k}^*(E)) \xrightarrow{F_{X/k}^*} H^i(X/K, F_X^*(E))$$

où le morphisme u est induit par le changement de base F_k (puissance q sur k) du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi_{X/k}} & X \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{F_k} & \text{Spec } k \end{array} .$$

Puisque k est parfait, F_k et $\pi_{X/k}$ sont des isomorphismes, donc u en est un aussi. Ceci achève la preuve de (4.1.2.16). \square

4.1.3. On va préciser le théorème (4.1.2) en l'étendant.

Soient S un k -schéma lisse et séparé et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme projectif et lisse. Notons $S = \bigcup S_{\alpha,0}$ une décomposition de S en réunion d'ouverts connexes affines $S_{\alpha,0} \stackrel{\alpha}{=} \text{Spec}(A_{\alpha,0})$, $A_{\alpha} = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_{d_\alpha}]/J_\alpha$ une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant $A_{\alpha,0}$ dont on a fixé une présentation et $S_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$. On désigne par

$$f_\alpha : X_{\alpha,0} = X \times_S S_{\alpha,0} \longrightarrow S_{\alpha,0}$$

la restriction de f . Quitte à décomposer $X_{\alpha,0}$ en somme disjointe de ses composantes connexes on peut supposer $X_{\alpha,0}$ connexe. D'après [Et 5, (3.3.1)] il existe un relèvement projectif h_α de f_α , $h_\alpha : X_\alpha \rightarrow S_\alpha$. Le complété formel de ce morphisme h_α est un morphisme projectif de \mathcal{V} -schémas formels

$$\hat{h}_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\alpha .$$

On suppose de plus que, pour tout α , X_α est plat sur \mathcal{V} : ceci implique [Et 5, (3.3.4)] que, pour tout α , \hat{h}_α est lisse.

Théorème (4.1.3.1). *Supposons k parfait. Soient S un k -schéma lisse et supposons que $f : X \rightarrow S$ est un k -morphisme projectif et lisse satisfaisant aux hypothèses 3.3.2 précédentes ou que f définit X comme une intersection complète relativement à S dans un espace projectif sur S [Et 5, (3.2.5)]. Alors, pour tout entier $i \geq 0$, f induit un foncteur*

$$R^i f_{conv*} : F^a\text{-Isoc}(X/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$$

qui commute à tout changement de base $S' \rightarrow S$ entre k -schémas lisses.

Démonstration. Compte tenu de [Et 6, (3.4.8.2), (3.4.8.6)] il s'agit de vérifier que le Frobenius (qui est défini par fonctorialité [LS, §8]) est un isomorphisme. D'après [B-G-R, (9.4.2/7)] et comme on l'a vu dans la preuve de (4.1.2) il suffit de vérifier l'isomorphisme sur les points fermés de S et le résultat provient alors de [(4.1.2.15)]. \square

4.2. Cas fini étale

Dans le cas fini étale on n'a pas lieu de supposer le corps k parfait ni que K contient les racines $q^{ièmes}$ de l'unité :

Théorème (4.2.1). *Soient S un k -schéma lisse et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme fini étale. Alors*

(4.2.1.1) *Pour tout entier $i \geq 0$, on a des foncteurs*

- (i) $R^i f_{\text{conv}*} : \text{Isoc}(X/K) \rightarrow \text{Isoc}(S/K)$,
- (ii) $R^i f_{\text{conv}*} : F^a\text{-Isoc}(X/K) \rightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$,
- (iii) *Pour $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$ et $i \geq 1$ on a*

$$R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E}) = 0.$$

(4.2.1.2) *Supposons de plus f galoisien de groupe G . Pour $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$ on a des isomorphismes canoniques*

- (i) $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (f_{\text{conv}*} f^*(\mathcal{E}))^G$,
- (ii) $H_{\text{conv}}^i(S/K, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{conv}}^i(X/K, f^*(\mathcal{E}))^G$,
- (iii) *Si $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(S/K)$, ces isomorphismes sont compatibles aux Frobenius.*

Démonstration.

Pour (4.2.1.1). Le (i) est là pour mémoire, car prouvé en [Et 6, 3.4.8]. On a vu dans la démonstration de [loc. cit.] que la définition de $R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E})$ est locale sur S : on peut donc supposer $S = \text{Spec } A_0$ affine et lisse sur k .

Posons $\mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A}$ où A est une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant A_0 , et relevons $f : X \rightarrow S$ en un morphisme fini étale de \mathcal{V} -schémas formels $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ [EGA IV, (18.3.2) ou (18.3.4)], et soit $F_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ un relèvement du Frobenius de S . Puisque f est étale, dans la décomposition classique du Frobenius F_X de X

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F_X} & X \\
 \searrow f & \swarrow F_{X/S} & \downarrow \pi_{X/S} \\
 & X^{(q)} & \xrightarrow{\pi_{X/S}} X \\
 & \downarrow f^{(q)} & \downarrow f \\
 S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array}$$

le morphisme $F_{X/S}$ est un isomorphisme et se relève de manière unique en un isomorphisme $F_{\mathcal{X}/S}$ s'insérant dans le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & & & & \\ & \searrow F_{\mathcal{X}/S} & & & \\ & \mathcal{X}^{(q)} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}/S}} & \mathcal{X} & \\ & \downarrow h^{(q)} & & \downarrow h & \\ & S & \xrightarrow{F_S} & S & \end{array} .$$

On pose $F_{\mathcal{X}} = \pi_{\mathcal{X}/S} \circ F_{\mathcal{X}/S}$.

Pour $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$, soit $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ une réalisation de \mathcal{E} sur \mathcal{X}_K ; par définition on a

$$\begin{aligned} R^i f_{\text{conv}*}(X/S; \mathcal{E}) &= H^i(\mathbb{R}h_{K*}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}} \otimes \Omega_{\mathcal{X}_K/S_K}^{\bullet})) \\ &= R^i h_{K*}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}), \end{aligned}$$

car \mathcal{X} est étale sur S . D'où le (iii) par le théorème B de Kiehl car h est affine.

Soit $\mathcal{E} \in F^a\text{-Isoc}(X/K)$ et $\phi : F_{\mathcal{X}}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ le Frobenius. D'après [cor (1.2.3)] il suffit de construire un isomorphisme ϕ^i (de Frobenius) sur $R^i f_{\text{conv}*}(\mathcal{E})$, compatible aux connexions. Comme F_S est plat, le morphisme de changement de base

$$F_{S_K}^* R^i f_{\text{conv}*}(X/S, \mathcal{E}) \rightarrow R^i f_{\text{conv}*}^{(q)}(X^{(q)}/S, \mathcal{E}) \simeq R^i h_{K*}^{(q)}(\pi_{\mathcal{X}_K/S_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}))$$

est un isomorphisme [Et 6, (3.4.4)]; par composition avec les isomorphismes

$$R^i h_{K*}^{(q)}(\pi_{\mathcal{X}_K/S_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})) \simeq R^i h_{K*}(F_{\mathcal{X}_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}))$$

(puisque $F_{\mathcal{X}/S}$ est un isomorphisme)
et

$$R^i h_{K*}(\phi) : R^i h_{K*}(F_{\mathcal{X}_K}^*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})) \simeq R^i h_{K*}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}),$$

on obtient le Frobenius ϕ^i cherché

$$\phi^i : F_{S_K}^* R^i f_{\text{conv}*}(X/S, \mathcal{E}) \simeq R^i f_{\text{conv}*}(X/S, \mathcal{E}).$$

En reprenant la preuve de [Et 6, (3.4.4)] on vérifie que ϕ^i est compatible aux connexions, d'où le (ii).

Pour (4.2.1.2). Soit \mathcal{E}_S une réalisation de \mathcal{E} sur \mathcal{S}_K . Par définition on a

$$f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{S}, f^*(\mathcal{E})) = h_{K*}(h_K^*(\mathcal{E}_S)).$$

Comme h_K est fini étale galoisien de groupe G [Et 6, (2.3.1)], la flèche canonique

$$\mathcal{E}_S \rightarrow (h_{K*}(h_K^*(\mathcal{E}_S)))^G$$

est un isomorphisme, d'où (i).

L'isomorphisme du (ii) est alors une conséquence classique du (i) [Et 1, III, 3.1.1].

La fonctorialité des constructions précédentes prouve le (iii). \square

Références

- [B1] P. Berthelot : *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Math. 407, Springer (1974).
- [B2] P. Berthelot : *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , Bulletin de la SMF, mémoire no 23, t. 114 / fasc 2, (1986) 7-32.
- [B3] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 96-03 de Rennes (1996).
- [B4] P. Berthelot : *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. 128, (1997) 329-377.
- [B5] P. Berthelot : *Cohomologie rigide*, § 3, préprint (14/09/89) non publié.
- [B-B-M] P. Berthelot, L. Breen, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Math. 930, Springer (1982).
- [B-M1] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline I*, Astérisque 63, (1979) 17-38.
- [B-M2] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline III : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Math. 86, Birkhäuser (1990).
- [B-O] P. Berthelot, A. Ogus : *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes 21, Princeton University Press (1978).
- [B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert : *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 261, Springer Verlag (1984).
- [Bo-Lü1] S. Bosch, W. Lütkebohmert : *Formal and rigid geometry I. Rigid Spaces*, Math. Ann. 295, (1993) 291-317.
- [Bo-Lü2] S. Bosch, W. Lütkebohmert : *Formal and rigid geometry II. Flat-tening techniques*, Math. Ann. 296, (1993) 403-429.
- [Bour] N. Bourbaki : *Algèbre* [A] chap. I à VII; *Algèbre commutative* [AC] chap. I à X.
- [C-T] B. Chiarellotto, N. Tsuzuki : *Cohomological descent of rigid cohomology for étale coverings*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 109, (2003).
- [Cr] R. Crew : *F-isocrystals and p -adic representations in Algebraic Geometry, Bowdoin 1985*, Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 46, AMS (1987), 111-138.

- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
- [El] R. Elkik : *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 6, (1973), 553-604.
- [Et 1] J.-Y. Etesse : *Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline*, Annales Inst. Fourier, t. 38, fasc. 4, (1988), 33-92.
- [Et 2] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 107, (2002), 111-138.
- [Et 3] J.-Y. Etesse : *Descente étale des F -isocristaux surconvergers et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.
- [Et 4] J.-Y. Etesse : *Images directes et fonctions L en cohomologie rigide*, hal.00262316/ arXiv :0803.1580.
- [Et 5] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité II*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova. Vol 122 (2009), 205-234.
- [Et 6] J.-Y. Etesse : *Images directes I : Espaces rigides analytiques et images directes*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 24 (2012), 101-151.
- [Et 7] J.-Y. Etesse : *Images directes III : F -isocristaux surconvergers*, hal-00425922/arXiv : 0910.4435 ; prépublication IRMAR 09-47, 36 pages.
- [E-LS 1] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergers I : Interprétation cohomologique*, Math. Annalen 296, (1993), 557-576.
- [E-LS 2] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergers II : Zéros et pôles unités*, Invent. Math. 127, (1997), 1-31.
- [G-K 1] E. Große-Klönne : *de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis*, Preprintreihe der Universität Münster SFB 478, Heft 39 (1999).
- [G-K 2] E. Große-Klönne : *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf*, Journal für die reine und angewandte Math. 519,(2000), 73-95.
- [Il] L. Illusie : *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 12, (1979), 501-661.

- [K 1] N. Katz : *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki 409, Lecture Notes in Math. 383, Springer (1972).
- [K 2] N. Katz : *Slope filtration of F -crystals*, Astérisque 63 (1979), 113-163.
- [K 3] N. Katz : *Nilpotent connections and the monodromy theorem : application of a result of Turritin*, Pub. Math. IHES 39(1970), 175-232.
- [Ked] K. Kedlaya : *Full faithfulness for overconvergent F -crystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter (2004), 819-835.
- [LS] B. Le Stum : *Rigid Cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press (2007).
- [Lü] Lütkebohmert W. : *Formal-algebraic and rigid-analytic geometry*, Math. Ann. 286 (1990), 341-371.
- [Mi] J.-S. Milne : *Etale cohomology*, Princeton University Press (1980).
- [M-W] P. Monsky, G. Washnitzer : *Formal Cohomology I*, Annals of Math. 88, n° 2 (1968), 181-217.
- [Mo 1] P. Monsky : *Formal Cohomology II*, Annals of Math. 88, n° 2 (1968), 218-238.
- [Mo 2] P. Monsky : *Formal Cohomology III*, Annals of Math. 88, n° 2 (1968), 315-343.
- [O 1] A. Ogus : *F -crystals and Griffiths transversality*, in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto 1977*, Kinokuniya Book-Store (1977).
- [O 2] A. Ogus : *F -isocrystals and de Rham Cohomology II : convergent isocrystals*, Duke Math. J. 51 (1984), 765-850.
- [O 3] A. Ogus : *The convergent topos in characteristic p* , in *Grothendieck Festschrift III*, Progress in Math. 88, Birkhäuser (1990).
- [O 4] A. Ogus : *F -crystals, Griffiths transversality and the Hodge decomposition*, Astérisque 221 (1994).
- [P] F. Pham : *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. 2, Birkhäuser (1979).
- [R] M. Raynaud : *Anneaux Locaux Henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer (1970).
- [Ro] A. M. Robert : *A Course in p -adic Analysis*, Graduate Texts in Math. 198, Springer (2000).

- [Sal] P. Salmon : *Sur les séries formelles restreintes*, C.R.A.S. Paris, 9 juillet 1962.
- [Se] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann (1968).
- [Shi 1] A. Shiho : *Crystalline Fundamental Groups II- Log Convergent Cohomology and Rigid Cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), 1-163.
- [Shi 2] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology I*, arXiv : 0707.1742v1 [math.NT] 12 Jul 2007.
- [Shi 3] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology II*, arXiv : 0707.1743v1 [math.NT] 12 Jul 2007.
- [Ta] J. Tate : *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. 12, (1971), 257-289.
- [vdP] M. van der Put : *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, t. 114/fasc. 2 (1986), 33-60.
- [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer (1972, 1973).
- [Tsu] N. Tsuzuki : *On base change theorem and coherence in rigid cohomology*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 891-918.
- [W 1] D. Wan : *Meromorphic continuation of L-functions of p-adic representations*, Annals of Math. 143 (1996), 469-498.
- [W 2] D. Wan : *Dwork's conjecture on unit-root zeta functions*, Annals of Math. 150 (1999), 867-927.
- [W 3] D. Wan : *Higher rank case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 807-852.
- [W 4] D. Wan : *Rank one case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 853-908.